POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2019/2020

poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. Uzasadnij, że liczba $1^{2019} + 2^{2019} + 3^{2019}$ dzieli się przez 11.
2. Pokaż, że dla dowolnego naturalnego $n > 0$ co najmniej jedna z liczb $5^n - 1$ i $5^n + 1$ jest złożona.
3. Pokaż, że jeżeli liczby dodatnie x, y, z, t w tej kolejności stanowią ciąg geometryczny, to albo wszystkie są równe, albo $x + t > y + z$.
4. Punkty T, R, A, P, E, Z są środkami kolejnych boków sześciokąta foremnego o boku 1. Oblicz pole sześciokąta $TRAPEZ$.
5. Wiedząc, że $\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, oblicz pole pięciokąta foremnego o boku długości 1.
6. Znajdź największą wartość wyrażenia $w = \frac{a}{a^2+a+1}$, gdzie a jest zmienną rzeczywistą.
7. Pokaż, że jeżeli liczba naturalna n ma dokładnie k dzielników, to iloczyn tych dzielników jest równy $\sqrt{n^k}$.
8. Wykaż, że wszystkich liczb 2019-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 4 jest dokładnie $\frac{1}{6} \cdot 2019 \cdot 2020 \cdot 2021$.
9. Na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a, b obrano punkt M. Ile wynosi największa wartość iloczynu odległości punktu M od jego rzutów prostokątnych na przyprostokątne trójkąta?
10. Dwusieczna kąta $60°$ w trójkącie dzieli przeciwległy bok w stosunku 1:2. Znajdź kąty tego trójkąta.

PMM – rok szkolny 2019/2020 – poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Oczywiście $1^{2019} = 1$. Zauważmy, że reszty z dzielenia 2^n tworzą ciąg okresowy o okresie 2 ,4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1, zatem reszta z dzielenia 2^{2019} przez 11 wynosi 6. Analogicznie uzasadniamy, że reszta z dzielenia 3^{2019} przez 11 wynosi 4. Ponieważ $1 + 6 + 4 = 11$, otrzymujemy tezę.

2. Jeżeli liczba $5^n + 1$ jest pierwsza, to nie jest podzielna przez 3 (bo jest większa od 3) oraz nie daje reszty 1 przy dzieleniu przez 3 (bo 5^n nie jest podzielne przez 3). Zatem $5^n + 1 = 3k + 2$ dla pewnego całkowitego k. Ale wtedy $5^n - 1 = 3k > 3$ nie jest liczbą pierwszą.

3. Rozważany ciąg jest postaci a, aq, aq^2, aq^3, gdzie $a, q > 0$. Ciąg ten jest stały wtedy i tylko wtedy, gdy $q = 1$. Załóżmy, że $q \neq 1$, wtedy $x + t - (y + z) = aq^3 - aq^2 - aq + a = a(q - 1)^2(q + 1) > 0$.

4. $TRAPEZ$ można rozciąć na sześć trójkątów równobocznych o boku będącym odległością środka wyjściowego sześciokąta foremnego od jego boku, a więc równym $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem pole sześciokąta $TRAPEZ$ to $6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{8}$.

5. Podzielmy pięciokąt $ABCDE$ przekątną AC na trapez i trójkąt. Kąty między przekątną i bokami pięciokąta wynoszą 72° i 36°. Wysokość trapezu równa się więc $\sin 72° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. Dorysowując przekątną CE, otrzymujemy trójkąt równoramienny ACE, zatem $d = AC = \frac{0{,}5}{\cos 72°} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Pole pięciokąta jest równe sumie pól trapezu $ACDE$ i trójkąta ABC, przy czym pole ABC jest równe polu $ACDE$ pomniejszonemu o pole ACE. W takim razie
$$2 \cdot \frac{1+d}{2} \sin 72° - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot d \sin 72° = \frac{5+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}.$$

6. Łatwo sprawdzić, że mianownik badanego wyrażenia jest dodatni dla dowolnego a. Jeżeli $a \leqslant 0$, to $w \leqslant 0$. Załóżmy, że $a > 0$. Ponieważ dla każdego $a > 0$ zachodzi $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, to $w = \frac{1}{a+\frac{1}{a}+1} \leqslant \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$. Z drugiej strony $w = \frac{1}{3}$ dla $a = 1$, więc odpowiedzią jest $\frac{1}{3}$.

7. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_k$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich dzielników liczby n, tzn. $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_k = n$. Oczywiście liczba $\frac{n}{a_i}$ jest dzielnikiem liczby n dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Stąd łatwy wniosek, że $a_i a_{k-i+1} = n$. Jeżeli $k = 2l$, to iloczyn wszystkich dzielników wynosi $a_1 a_{2l} \cdot a_2 a_{2l-1} \cdot \cdots \cdot a_l a_{l+1} = n^l = \sqrt{n^{2l}}$. Jeśli $k = 2l + 1$, "środkowym" dzielnikiem jest $\sqrt{n}$, więc iloczyn ten wynosi $a_1 a_{2l+1} \cdot a_2 a_{2l} \cdot \cdots \cdot a_l a_{l+2} \cdot a_{l+1} = n^l \sqrt{n} = \sqrt{n^{2l+1}}$.

8. Dla pierwszej cyfry równej 4 mamy jedną liczbę, dla równej 3 mamy 2018 liczb, dla pierwszej cyfry równej 2 mamy 2018 liczb z cyfrą 2 na jednym z pozostałych miejsc i $\binom{2018}{2}$ z dwiema jedynkami, a dla pierwszej cyfry równej 1 mamy $\binom{2018}{3}$ liczb z trzema jedynkami, $2018 \cdot 2017$ liczb z drugą jedynką i jedną dwójką oraz 2018 liczb z trójką. W sumie otrzymujemy
$$1 + 2018 + 2018 + \binom{2018}{2} + \binom{2018}{3} + 2018 \cdot 2017 + 2018,$$
co po prostych przekształceniach daje żądany wynik.

9. Oznaczmy przez x, y odległości punktu M od jego rzutów odpowiednio na boki a, b. Z podobieństwa trójkątów mamy $y = a(b - x)/b$, zatem rozważany iloczyn wynosi $xy = ax(b - x)/b$. Rozważając odpowiednią parabolę, otrzymujemy, że największa wartość tego wyrażenia jest osiągana dla $x = b/2$ i wynosi $ab/4$.

10. Ponieważ stosunek długości pozostałych boków także wynosi 1:2, czyli ich długości to a, $2a$, z twierdzenia kosinusów otrzymujemy długość dzielonego boku równą $a\sqrt{3}$. Z obserwacji, że rozważany trójkąt jest "połową" trójkąta równobocznego wnioskujemy, że pozostałe kąty mają miary 30° i 90°.