POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2019/2020

poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Pokaż, że jeśli liczba naturalna n nie jest podzielna ani przez 2, ani przez 3, to liczba $w = n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ jest podzielna przez 4608.

2. Załóżmy, że a, b, c $(a \neq 0)$ są liczbami wymiernymi oraz $|4a + c| = 2|b|$. Pokaż, że jeśli równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa rozwiązania, to są one liczbami wymiernymi.

3. Wielomian niezerowy W ma współczynniki całkowite oraz liczby $W(2019)$ i $W(2020)$ są nieparzyste. Pokaż, że wielomian W nie ma pierwiastków całkowitych.

4. Odcinki $AB = a$ i $CD = c$ są podstawami trapezu, na którego ramieniu AD leży punkt M. Znajdź długość odcinka MN równoległego do podstaw trapezu, jeżeli N leży na BC oraz $\frac{AM}{AD} = k$.

5. Pokaż, że $a^3 + b^3 + c^3 + 2abc = a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z liczb a, b, c jest równa sumie dwóch pozostałych.

6. Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia $w = a^2(b^2+1) - 2a(b+1) + 1$, jeśli a i b są liczbami rzeczywistymi.

7. Niech p, q będą różnymi liczbami pierwszymi. Pokaż, że suma wszystkich dzielników liczby pq^3 dzieli się przez $pq + p + q + 1$.

8. Pokaż, że wyrażenie $\sqrt{3n + 2n\sqrt{n}}$ jest liczbą całkowitą dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n.

9. Każdy punkt na prostej pomalowano na zielono lub czerwono w taki sposób, że dowolne punkty odległe o 4 są różnych kolorów. Pokaż, że istnieją punkty odległe o 10, które są różnych kolorów.

10. W trójkącie równobocznym ABC o boku 2 punkt D jest środkiem boku AC, a punkt E leży na boku BC. Oblicz BE, jeżeli $DE = x$.