POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2019/2020

poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Pokaż, że jeśli liczba naturalna n nie jest podzielna ani przez 2, ani przez 3, to liczba $w = n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ jest podzielna przez 4608.

2. Załóżmy, że a, b, c $(a \neq 0)$ są liczbami wymiernymi oraz $|4a + c| = 2|b|$. Pokaż, że jeśli równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa rozwiązania, to są one liczbami wymiernymi.

3. Wielomian niezerowy W ma współczynniki całkowite oraz liczby $W(2019)$ i $W(2020)$ są nieparzyste. Pokaż, że wielomian W nie ma pierwiastków całkowitych.

4. Odcinki $AB = a$ i $CD = c$ są podstawami trapezu, na którego ramieniu AD leży punkt M. Znajdź długość odcinka MN równoległego do podstaw trapezu, jeżeli N leży na BC oraz $\frac{AM}{AD} = k$.

5. Pokaż, że $a^3 + b^3 + c^3 + 2abc = a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z liczb a, b, c jest równa sumie dwóch pozostałych.

6. Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia $w = a^2(b^2+1)-2a(b+1)+1$, jeśli a i b są liczbami rzeczywistymi.

7. Niech p, q będą różnymi liczbami pierwszymi. Pokaż, że suma wszystkich dzielników liczby pq^3 dzieli się przez $pq + p + q + 1$.

8. Pokaż, że wyrażenie $\sqrt{3n + 2n\sqrt{n}}$ jest liczbą całkowitą dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n.

9. Każdy punkt na prostej pomalowano na zielono lub czerwono w taki sposób, że dowolne punkty odległe o 4 są różnych kolorów. Pokaż, że istnieją punkty odległe o 10, które są różnych kolorów.

10. W trójkącie równobocznym ABC o boku 2 punkt D jest środkiem boku AC, a punkt E leży na boku BC. Oblicz BE, jeżeli $DE = x$.

PMM – rok szkolny 2019/2020 – poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Mamy $w = (n^8-1)(n^4-1) = (n^4+1)(n^2+1)^2(n+1)^2(n-1)^2$. Każdy z czynników jest parzysty. Co więcej, jedna z liczb $n+1$ i $n-1$ jest podzielna przez 4, a dodatkowo jedna z nich jest podzielna przez 3. Oznacza to, że liczba w dzieli się przez $2^9 \cdot 3^2 = 4608$.

2. Skoro $4a + c = \pm 2b$, to rozważane równanie ma rozwiązanie $x = 2$ lub $x = -2$. Ponieważ iloczyn rozwiązań jest równy $\frac{c}{a}$, drugie rozwiązanie także jest liczbą wymierną.

3. Dla każdej liczby całkowitej n liczby $W(2n)$ i $W(0)$ są tej samej parzystości. Również liczby $W(2n+1)$ i $W(1)$ mają taką samą parzystość. Z warunków zadania mamy zatem, że wartość wielomianu W dla dowolnego całkowitego argumentu jest liczbą nieparzystą, czyli różną od zera.

4. Jeżeli $a = c$, to $MN = a$. Załóżmy, że $a > c$, wtedy proste AD i BC przecinają się w pewnym punkcie S. Oznaczmy $SD = x$, $AD = d$. Ponieważ (tw. Talesa) $\frac{x}{x+d} = \frac{c}{a}$, mamy $x = \frac{cd}{a-c}$. Ponadto $\frac{x+DM}{x+d} = \frac{MN}{a}$. Z tego oraz z równości $DM = (1-k)d$ mamy $MN = (1-k)a + kc$. Analogicznie otrzymamy identyczny wzór, jeśli $a < c$. Ostatecznie $MN = (1-k)a + kc$ dla dowolnych a, c.

5. Jedna z liczb a, b, c jest równa sumie dwóch pozostałych, jeżeli $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 0$. Ta równość jest równoważna równości z treści zadania, co można sprawdzić przez standardowe przekształcenia.

6. Ponieważ $w = (ab-1)^2 + (a-1)^2 - 1 \geqslant -1$ oraz $w = -1$ dla $a = b = 1$, to odpowiedzią jest -1.

7. Suma wszystkich dzielników wynosi $1+q+q^2+q^3+p+pq+pq^2+pq^3 = (1+p)(1+q+q^2+q^3) = (1+p)(1+q)(1+q^2)$. Tezę otrzymujemy z równości $pq+p+q+1 = (p+1)(q+1)$.

8. Podstawmy $n = k^2$, gdzie k jest dodatnią liczbą naturalną. Wtedy badane wyrażenie jest równe $k\sqrt{3+2k}$. Chcemy, aby $\sqrt{3+2k} = r$ dla pewnej liczby naturalnej r, czyli $k = \frac{r^2-3}{2}$. Jeżeli $r = 2p+1$, dla pewnej liczby naturalnej p, to k jest liczbą całkowitą. Pokazaliśmy zatem, że jeżeli $n = (2p^2+2p-1)^2$ dla pewnej liczby naturalnej $p \geqslant 2$, to rozważane wyrażenie jest liczbą całkowitą.

9. Zauważmy, że punkty 0, 8 i 16 są jednego koloru, a punkty 4, 12 i 20 są też jednego koloru, ale innego. W szczególności punkty 0 i 20 są różnych kolorów: jeden z nich jest zielony, a drugi czerwony. Oczywiście punkt 10 różni się kolorem albo od 0, albo od 20.

10. Zauważmy, że $DB = \sqrt{3}$ oraz jeśli Y jest rzutem prostokątnym D na CB, to $DY = \sqrt{3}/2$ oraz $CY = 1/2$. W takim razie $x \in [\sqrt{3}/2, \sqrt{3}]$. Jeśli $x = \sqrt{3}/2$, to $E = Y$, więc $EB = 3/2$. Jeśli $x \in (1, \sqrt{3}]$, to zadanie ma jedno rozwiązanie, gdyż E należy do odcinka YB. Ponieważ $EY = \sqrt{x^2 - 3/4}$, $BY = 3/2$, mamy $BE = BY - EY = 3/2 - \sqrt{x^2 - 3/4}$. Jeśli $x \in (\sqrt{3}/2, 1]$, to zadanie ma dwa rozwiązania, gdyż E może należeć do YB lub do YC. Zatem $BE = BY - EY = 3/2 - \sqrt{x^2 - 3/4}$ lub $BE = BY + EY = 3/2 + \sqrt{x^2 - 3/4}$.