

## POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA V – rok szkolny 2019/2020

poziom: ponadpodstawowy

### RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Pokaż, że liczba  $2019^{2009} + 2018^{2009}$  jest podzielna przez  $2019^{287} + 2018^{287}$ .
2. Znajdź wszystkie pierwiastki wielomianu  $9x^3 + 27x^2 - 64x - 112$ , wiedząc, że wartość tego wielomianu dla liczby przeciwnej jednemu z pierwiastków wynosi 640.
3. W trójkącie prostokątnym równoramiennym punkt  $P$  leży na przeciwprostokątnej, a punkty  $Q, R$  są rzutami punktu  $P$  na przyprostokątne. Wykaż, że obwód trójkąta  $PQR$  jest większy od długości przeciwprostokątnej.
4. Określ, ile jest rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

w zależności od parametru  $a$ .

5. Oblicz największą wartość wyrażenia  $\cos \alpha + \sin \alpha$ .
6. Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  liczba  $\frac{n^2 + \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n} - 1}$  jest liczbą naturalną.
7. Pokaż, że pole równoległoboku wpisanego w prostokąt tak, że jego boki są równoległe do przekątnych prostokąta, ma pole nieprzekraczające połowy pola prostokąta.
8. Rozwiąż równanie  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{7}$  w liczbach całkowitych tego samego znaku.
9. Długości krawędzi pewnego prostopadłościanu są liczbami naturalnymi, przy czym długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka mają różne reszty z dzielenia przez 5. Objętość tego prostopadłościanu jest liczbą niepodzielną przez 5. Określ, czy pole powierzchni tego prostopadłościanu jest liczbą podzielną przez 5.
10. Załóżmy, że  $\sqrt{n} + \sqrt{k}$  jest liczbą wymierną dla pewnych liczb naturalnych  $n, k$ . Pokaż, że  $n$  i  $k$  są kwadratami liczb naturalnych.