POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA V – rok szkolny 2019/2020

poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Pokaż, że liczba $2019^{2009} + 2018^{2009}$ jest podzielna przez $2019^{287} + 2018^{287}$.
2. Znajdź wszystkie pierwiastki wielomianu $9x^3 + 27x^2 - 64x - 112$, wiedząc, że wartość tego wielomianu dla liczby przeciwnej jednemu z pierwiastków wynosi 640.
3. W trójkącie prostokątnym równoramiennym punkt P leży na przeciwprostokątnej, a punkty Q, R są rzutami punktu P na przyprostokątne. Wykaż, że obwód trójkąta PQR jest większy od długości przeciwprostokątnej.
4. Określ, ile jest rozwiązań układu równań
$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$
w zależności od parametru a.
5. Oblicz największą wartość wyrażenia $\cos\alpha + \sin\alpha$.
6. Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $\dfrac{n^2 + \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n} - 1}$ jest liczbą naturalną.
7. Pokaż, że pole równoległoboku wpisanego w prostokąt tak, że jego boki są równoległe do przekątnych prostokąta, ma pole nieprzekraczające połowy pola prostokąta.
8. Rozwiąż równanie $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{7}$ w liczbach całkowitych tego samego znaku.
9. Długości krawędzi pewnego prostopadłościanu są liczbami naturalnymi, przy czym długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka mają różne reszty z dzielenia przez 5. Objętość tego prostopadłościanu jest liczbą niepodzielną przez 5. Określ, czy pole powierzchni tego prostopadłościanu jest liczbą podzielną przez 5.
10. Załóżmy, że $\sqrt{n} + \sqrt{k}$ jest liczbą wymierną dla pewnych liczb naturalnych n, k. Pokaż, że n i k są kwadratami liczb naturalnych.

PMM – rok szkolny 2019/2020 – poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Podstawmy $x = 2019^{287}$, $y = 2018^{287}$, wtedy pytamy o podzielność liczby $x^7 + y^7$ przez $x + y$. Ponieważ $x^7 + y^7 = (x + y)(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)$, teza została dowiedziona.

2. Niech a będzie pierwiastkiem, o którym mowa w treści zadania, wtedy $9a^3 + 27a^2 - 64a - 112 = 0$ oraz $-9a^3 + 27a^2 + 64a - 112 = 640$. Dodając te równości stronami, po uproszczeniach otrzymujemy $a^2 = 16$. Sprawdzamy, że jedynie $a = -4$ jest pierwiastkiem danego wielomianu. Dzieląc rozważany wielomian przez $x + 4$, otrzymujemy wielomian $9x^2 - 9x - 28$, którego pierwiastkami są liczby $\frac{7}{3}$ oraz $-\frac{4}{3}$. Ostatecznie, pierwiastkami rozważanego wielomianu są: -4, $\frac{7}{3}$ oraz $-\frac{4}{3}$.

3. Przyjmijmy taką jednostkę długości, że boki rozważanego trójkąta mają długości 1, 1, $\sqrt{2}$. Niech x, y oznaczają odległości odpowiednio punktów Q, R od wierzchołka kąta prostego. Obwód trójkąta PQR wynosi $1 + \sqrt{x^2 + y^2}$, gdyż $x + y = 1$. Wystarczy zatem pokazać, że $\sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt{2} - 1$, czyli $x^2 + (1 - x)^2 > 3 - 2\sqrt{2}$, co oznacza $x^2 - x - 1 + \sqrt{2} > 0$. Ponieważ wyróżnik tego trójmianu $\Delta = 5 - 4\sqrt{2}$ jest ujemny, to nierówność jest oczywista.

4. Zauważmy, że jeżeli (x, y) jest rozwiązaniem badanego układu, to $(\pm x, \pm y)$ także jest jego rozwiązaniem. Oznacza to, że o liczbie rozwiązań decydują rozwiązania z I ćwiartki układu współrzędnych. Załóżmy, że $x, y \geqslant 0$, wtedy rozważany układ przyjmuje postać $x + y = a$, $x^2 + y^2 = 1$, zatem rozwiązaniami są punkty wspólne prostej i okręgu, leżące w I ćwiartce. Wyróżnijmy sytuację, gdy punkty wspólne leżą na osiach układu (dla $a = 1$) oraz sytuację, gdy prosta jest do okręgu styczna (dla $a = \sqrt{2}$). Teraz jest jasne, że rozważany układ nie posiada rozwiązań dla $a < 1$ lub $a > \sqrt{2}$, posiada 4 rozwiązania, gdy a jest równe 1 lub $\sqrt{2}$, oraz posiada 8 rozwiązań, jeśli $a \in (1, \sqrt{2})$.

5. Oznaczmy $w = \cos\alpha + \sin\alpha$. Mamy $w^2 = 1 + 2\cos\alpha\sin\alpha = 1 + \sin 2\alpha \leqslant 2$. Zatem $|w| \leqslant \sqrt{2}$. Ponadto $w = \sqrt{2}$ dla $\alpha = 45^o$. Wynika z tego, że największa wartość wyrażenia w jest równa $\sqrt{2}$.

6. Wystarczy zauważyć, że

$$\frac{n^2 + \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n} - 1} = \frac{n^3 + 1}{n^2 + 1 - n} = \frac{(n + 1)(n^2 - n + 1)}{n^2 - n + 1} = n + 1.$$

7. Niech $ABCD$ będzie rozważanym prostokątem, a $PQRS$ równoległobokiem, przy czym $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$, $S \in DA$. Niech $AB = a$, $BC = b$. Jeżeli $PB = x$, to z podobieństwa odpowiednich trójkątów mamy $BQ = \frac{bx}{a}$, oraz $AS = CQ = b - \frac{bx}{a}$. Pole rozważanego równoległoboku jest różnicą pola prostokąta i sumy pól czterech trójkątów, zatem wynosi $ab - \frac{bx^2}{a} - \frac{b(a-x)^2}{a} = \frac{b}{a}(a^2 - x^2 - (a - x)^2)$. Trójmian ten ma pierwiastki 0 oraz a, zaś parabola będąca jego wykresem ma ramiona skierowane w dół, więc przyjmuje największą wartość dla $x = \frac{0+a}{2}$ i wynosi ona $\frac{ab}{2}$.

8. Oczywiście liczby x, y nie mogą być obie ujemne, zatem $x, y > 0$. Rozważane równanie zapiszmy w postaci $xy = 14x + 7y$, skąd $(x - 7)(y - 14) = 98$. Gdyby oba czynniki po lewej stronie były ujemne, to $x - 7 > -7$, $y - 14 > -14$, zatem $(x - 7)(y - 14) < 7 \cdot 14 = 98$. Sprzeczność dowodzi, że $x - 7, y - 14 > 0$. Ponieważ $x - 7$ musi być jedną z liczb: 1, 2, 7, 14, 49, 98, otrzymujemy rozwiązania (x, y): (8,112), (9,63), (14,28), (21,21), (56,16), (105,15).

9. Niech a, b, c będą resztami z dzielenia przez 5 długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. Z warunków zadania mamy, że abc nie dzieli się przez 5, zatem a, b, c są różnymi liczbami ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$. Zauważmy, że dwie z nich dają sumę 5 (ponieważ zawsze 2 i 3 lub 1 i 4 są wśród nich). Niech $a+b = 5$. Pole powierzchni prostopadłościanu przy dzieleniu przez 5 daje resztę $2(ab+bc+ca) = 2ab + 10c$, a jest to liczba niepodzielna przez 5.

10. Zauważmy, że jeśli dla pewnej liczby naturalnej n liczba $\sqrt{n}$ jest wymierna, to n musi być kwadratem liczby naturalnej. Rzeczywiście, skoro $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, gdzie $\frac{p}{q}$ jest nieskracalnym ułamkiem, to $n = \frac{p^2}{q^2}$, skąd $q^2 = 1$ i $n = p^2$. Przypuśćmy teraz, że $\sqrt{n} + \sqrt{k} = \frac{p}{q}$, gdzie $\frac{p}{q}$ jest nieskracalnym ułamkiem $(p > 0)$. Wówczas $\sqrt{k} = \frac{p}{q} - \sqrt{n}$, co po podniesieniu do kwadratu daje $\sqrt{n} = \left(\frac{p^2}{q^2} + n - k\right)\frac{q}{2p}$. Z uwagi powyżej wnioskujemy, że n jest kwadratem liczby naturalnej. Ale wtedy $\sqrt{k} = \frac{p}{q} - \sqrt{n}$ jest liczbą wymierną, czyli k też musi być kwadratem liczby naturalnej.