POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA V – rok szkolny 2019/2020

poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. Wyjaśnij, ile cyfr w zapisie dziesiętnym ma liczba $\frac{10^{2019}-1}{999}$.
2. Podaj największy dzielnik liczby 19999999999999995 mniejszy od niej.
3. Liczb naturalnych większych od liczby naturalnej n i nie większych od n^3 jest 12144. Znajdź liczbę n.
4. Pokaż, że liczba $625^{16} - 1$ jest podzielna przez 256.
5. Basia podzieliła kąt na cztery kąty ostre. Adaś zauważył, że na dwa sposoby można wybrać trzy z nich tak, aby były kątami jednego trójkąta. Jacek dodał, że dwa z nich dają w sumie kąt prosty. Jaki kąt podzieliła Basia?
6. Adrian twierdzi, że nie da się zbudować wielokąta wypukłego, który miałby 16 przekątnych. Monika twierdzi, że można taki wielokąt zbudować. Kto z nich ma rację?
7. Wykorzystując jedynie cyfry 1, 2 oraz 3 należy napisać jak największą liczbę w taki sposób, by żadna sąsiednia para cyfr się nie powtarzała (np. liczba 233132 jest dozwolona a liczba 233123 nie jest dozwolona ponieważ powtarza się w niej para cyfr 23).
8. Pokaż, że w sześciokącie wpisanym w okrąg suma pewnych trzech kątów wewnętrznych jest równa sumie trzech pozostałych.
9. W pudełku są piłeczki białe, czarne i czerwone. Czarnych jest o 5 mniej niż białych, a czerwonych jest o 3 więcej niż czarnych i białych razem. Określ, ile piłeczek każdego koloru jest w pudełku, jeżeli wszystkich piłeczek jest 41.
10. Zwiększając pewną liczbę naturalną o 1 zwiększamy ją o mniej niż 9%, a zwiększając ją o 2 zwiększamy ją o więcej niż 16%. Jaka to liczba?

PMM – rok szkolny 2019/2020 – poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Ponieważ $10^{2019} - 1 = 99\ldots9$ jest liczbą 2019-cyfrową i 2019 dzieli się przez 3, to rozważana liczba jest równa $1001001\ldots001$ i ma $2019 - 2 = 2017$ cyfr.

2. Ponieważ liczba ta dzieli się przez 3, to jest to jej najmniejszy dzielnik większy od 1. Stąd mamy, że szukanym dzielnikiem jest trzecia część rozważanej liczby równa 6666666666666665.

3. Rozważanych liczb jest $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$. Ponieważ $12144 = 22 \cdot 23 \cdot 24$, to $n = 23$.

4. Mamy $625^{16} - 1 = 5^{64} - 1 = (5^{32}+1)(5^{16}+1)(5^8+1)(5^4+1)(5^2+1)(5+1)(5-1)$. Każdy z powyższych czynników jest parzysty, a ostatni podzielny przez 4. Zatem dzieli się przez $2^8 = 256$.

5. Oznaczając odpowiednie części kąta przez k_1, k_2, k_3, k_4 otrzymamy $k_1 + k_2 + k_3 = k_2 + k_3 + k_4 = 180°$. W szczególności $k_4 = k_1$. Z uwagi Jacka wynika, że $k_1 + k_4 = 90°$ lub $k_2 + k_3 = 90°$ lub (bez zmiany ogólności) $k_1 + k_2 = 90°$. W pierwszym przypadku mamy $k_1 = 45°$, zatem $k_2 + k_3 = 135°$, skąd $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 225°$. W przypadku drugim mamy $k_1 = 90°$, co przeczy temu, że wszystkie części są kątami ostrymi. Ostatni przypadek daje równość $k_3 = 90°$ również sprzeczną z założeniami.

   Ponieważ kąt 135° może być sumą dwóch kątów ostrych, to pierwszy przypadek jest możliwy, zatem Basia podzieliła kąt 225°.

6. Rację ma Adrian. Liczba przekątnych w n-kącie wypukłym jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$, zatem szukamy rozwiązań równania $n(n-3) = 32 = 2^5$. Łatwo zauważyć, że równanie to nie ma rozwiązania w liczbach naturalnych, gdyż jedna z liczb n i $n-3$ jest nieparzysta, a jedynym podzielnikiem nieparzystym liczby 32 jest 1.

7. Ponieważ wszystkich możliwych par utworzonych przez cyfry 1, 2 i 3 jest 9, to największa liczba, jaką możemy utworzyć nie może mieć więcej niż 10 cyfr. Szukając liczby dziesięciocyfrowej spełniającej warunki zadania, największe pary musimy próbować ustawiać na początku tej liczby. W wyniku otrzymujemy 3323122113.

8. Niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem wpisanym w okrąg. Teza zadania jest równoważna wykazaniu, że suma pewnych trzech jego kątów wewnętrznych jest równa 360°. Korzystając z tego, że czworokąty $ABCD$ i $DEFA$ są wpisane w okrąg otrzymujemy: $\angle ABC + \angle CDE + \angle EFA = \angle ABC + \angle CDA + \angle ADE + \angle EFA = 180° + 180° = 360°$.

9. Ponieważ czarnych i białych piłeczek jest o 3 mniej niż czerwonych, ale także 41 pomniejszone o ilość czerwonych piłeczek, to $x - 3 = 41 - x$, gdzie x oznacza ilość czerwonych piłeczek. Mamy stąd, że są 22 piłeczki czerwone. Zatem piłeczek białych i czarnych jest 19, ale białych o 5 więcej. Łatwo teraz obliczyć, że piłeczek czarnych jest 7, a białych 12.

10. Niech n oznacza szukaną liczbę. Z warunku zadania wynika, że $\frac{1}{n} < 9\% = \frac{9}{100}$, $\frac{2}{n} > 16\% = \frac{4}{25}$. Stąd mamy $n > \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$, $n < 12,5$. Wynika z tego, że $n = 12$.