POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA V – rok szkolny 2019/2020

poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Między każde kolejne liczby ciągu $6, 5, 4, 3, 2, 1$ Basia wpisała znak dodawania lub znak odejmowania i obliczyła wynik. Na ile sposobów mogła Basia wpisać te znaki? Ile różnych wyników można w ten sposób otrzymać?

2. Liczba dzielników liczby p^{10} jest dzielnikiem liczby pierwszej p. Określ, ile dzielników ma liczba $(p+4)^4$.

3. Liczbę trzycyfrową podzielono przez 33. Otrzymany wynik okazał się tą liczbą po skreśleniu pierwszej cyfry. Znajdź tę liczbę.

4. Jaki wielokąt wypukły ma cztery razy mniej boków niż przekątnych?

5. Pokaż, że dla dowolnych całkowitych a, b liczba $2a(a-1)(a-2)+3b(b+1)$ jest podzielna przez 6.

6. Okrąg o promieniu 1 toczy się bez poślizgu po zewnętrznej stronie nieruchomego prostokąta o wymiarach $2\pi \times \pi$. Ile obrotów wykona ten okrąg do powrotu na miejsce początkowe?

7. Dwie środkowe w trójkącie mają równe długości. Wykaż, że trójkąt ten jest równoramienny.

8. Trapez $ABCD$ o podstawie AB jest opisany na okręgu o środku O. Pokaż, że kąt AOD jest prosty.

9. Za cztery zeszyty i trzy długopisy Adaś zapłacił 31 zł. Zeszyt i długopis kosztują razem 8,5 zł. Ile kosztuje długopis?

10. Antek twierdzi, że w roku w którym obchodził swoje 53-cie urodziny, były 53 piątki. Środkowy dzień tego roku był bardzo słoneczny. Jaki to był dzień tygodnia?

PMM – rok szkolny 2019/2020 – poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Sposobów postawienia znaków jest $2^5 = 32$. Możemy otrzymać 16 różnych wyników: każdą liczbę nieparzystą z zakresu od -9 do 21. Rzeczywiście, wartość wyrażenia otrzymanego przez Basię mieści się między $6-5-4-3-2-1=-9$, a $6+5+4+3+2+1=21$. Co więcej, zamiana znaku "-" na "+" przy dowolnym składniku zmienia wartość wyniku o liczbę parzystą, więc każdy otrzymany wynik jest nieparzysty. Zmieniając dokładnie jeden "-" na "+" w działaniu $6-5-4-3-2-1=-9$ możemy otrzymać wynik większy o 2, 4, 6, 8 lub 10 (czyli -7, -5, -3, -1 oraz 1). Analogicznie, zmieniając dokładnie jeden "+" na "-" w działaniu $6+5+4+3+2+1=21$ możemy otrzymać wynik mniejszy o 2, 4, 6, 8 lub 10 (czyli 19, 17, 15, 13 oraz 11). Dodatkowo, zmieniając dokładnie jeden "-" na "+" w działaniu $6+5-4-3-2-1=1$ możemy otrzymać wynik większy o 2, 4, 6 lub 8 (czyli 3, 5, 7 oraz 9).

2. Skoro liczba p jest pierwsza, to liczba dzielników liczby p^{10} jest równa 11. W takim razie $p=11$. Ponieważ $(11+4)^4 = 3^4 \cdot 5^4$, to liczba ta ma $5 \cdot 5 = 25$ dzielników.

3. Szukana liczba to $100x+y$, gdzie x jest jej pierwszą cyfrą, a y liczbą co najwyżej dwucyfrową. Z warunków zadania wynika, że $100x+y=33y$, skąd $25x=8y$. W takim razie $x=8$ oraz $y=25$. Szukaną liczbą jest 825.

4. W n-kącie przekątnych jest $\frac{n(n-3)}{2}$. Ta liczba jest równa $4n$ dla $n=11$.

5. Wystarczy zauważyć, że każdy ze składników dzieli się przez 2 i 3.

6. Na krótszym boku wykona pół obrotu, na dłuższym jeden, a na każdym wierzchołku ćwierć obrotu. Daje to sumarycznie 4 obroty.

7. Niech AA' i BB' będą równymi środkowymi trójkąta ABC przecinającymi się w punkcie P. Ponieważ środkowe trójkąta dzielą się w stosunku 2:1, to $AP=BP$. Wynika z tego, że kąty ABP i BAP są równe, zatem trójkąty ABB' i BAA' są przystające, bo mają równe dwa boki i równe kąty między nimi. Stąd $\measuredangle BAB' = \measuredangle ABA'$, co daje tezę.

8. W trapezie $ABCD$ o podstawie AB zachodzi $\angle ADC + \angle DAB = 180°$. Co więcej, prosta łącząca punkt O z wierzchołkiem trapezu jest dwusieczną kąta przy tym wierzchołku. Zatem $\angle AOD = 180° - (\angle ADO + \angle DAO) = 180° - \frac{1}{2}(\angle ADC + \angle DAB) = 90°$.

9. Zeszyt i trzy zestawy zeszyt+długopis kosztują 31 zł, zatem koszt zeszytu to $31 - 3 \cdot 8,5 = 5,5$ zł. Stąd natychmiast mamy, że 3 zł to koszt zeszytu.

10. Rok, który ma środkowy dzień (czyli nieparzystą liczbę dni), nie jest przestępny. Zaczyna się on i kończy takim samym dniem tygodnia, ponieważ $365 = 7 \cdot 52 + 1$. Ponadto takich dni tygodnia (i tylko tych) w takim roku jest 53. Oznacza to, że rozważany rok zaczynał się w piątek. Środkowy dzień ma numer $7 \cdot 26 + 1$, zatem to także był piątek.