POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA V – rok szkolny 2019/2020

poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Wypisano liczby naturalne od 1 do 2019 nie używając spacji otrzymując w ten sposób ciąg cyfr. Pewna cyfra dzieli ten ciąg na dwie części o równych ilościach cyfr. Podaj tę cyfrę.

2. Wewnątrz pięciokąta foremnego $ABCDE$ obrano punkt X taki, że trójkąt ACX jest przystający do trójkąta ACB. Oblicz, jaką miarę ma kąt DXE.

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne jednocyfrowe n, k, l spełniające $\frac{n+1}{n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{l}$.

4. Danych jest 13 liczb całkowitych. Określ, czy można tak wybrać 4 spośród nich, aby ich suma była podzielna przez 4.

5. Jaka jest najmniejsza liczba naturalna, która ma dokładnie 10 dzielników?

6. Dane są dwa współśrodkowe okręgi o promieniach 1 i 2. Na większym okręgu znajdują się punkty A i B takie, że $AB = 2$. Na mniejszym okręgu znajdują się punkty X i Y takie, że proste AX i BY są styczne do mniejszego okręgu oraz odcinki AX i BY przecinają się w punkcie P. Podaj miarę kąta XPY.

7. Określ, dla jakiej cyfry x liczba $2(10^{2019} + x)$ jest podzielna przez 3.

8. Jacek narysował wielokąt, który ma 9 przekątnych, a Antek narysował wielokąt, który ma o jeden bok więcej niż ten narysowany przez Jacka. Ile przekątnych ma wielokąt narysowany przez Antka?

9. Jeśli pewną liczbę powiększymy o 3, a następnie podwoimy otrzymany wynik, to otrzymamy liczbę pięciokrotnie większą od początkowej. Jaka to liczba?

10. Woda zmieniając się w lód zwiększa swoją objętość o $\frac{1}{11}$. O jaką część zmniejszy się objętość lodu, gdy zamieni się on w wodę?

PMM – rok szkolny 2019/2020 – poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. W ciągu jest $9+2\cdot 90+3\cdot 900+4\cdot 1020 = 6969 = 2\cdot 3484+1$ cyfr. Zatem szukana cyfra to 3485-ta od lewej. Ponieważ $3485 = 9+2\cdot 90+3\cdot 900+595$ oraz $595 = 4\cdot 148+3$, to szukaną cyfrą jest trzecia cyfra 149-tej liczby czterocyfrowej. Skoro 149-tą liczbą czterocyfrową jest 1148, to szukaną cyfrą jest 4.

2. Kąty pięciokąta foremnego mają miarę $108°$, zatem $\angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36°$, stąd $\angle DCX = \angle EAX = 108° - 36° - 36° = 36°$. Ponieważ trójkąty DCX i AEX są równoramienne, to $\angle CXD = \angle AXE = \frac{1}{2}(180° - 36°) = 72°$. Mamy $\angle DXC + \angle CXA + \angle AXE = 228^o$ jest kątem wklęsłym, zatem $\angle DXE = 360° - 72° - 72° - 108° = 108°$.

3. Zauważmy, że jeżeli $k, l > 1$, to prawa strona równania jest nie większa od 1, natomiast lewa strona jest większa od 1, więc nie mogą być równe. Mamy zatem, że co najmniej jedna z liczb k, l jest równa 1 i łatwo zauważyć, że wówczas druga równa się n. W takim razie mamy następujące rozwiązania (n, k, l): $(n, 1, n)$ oraz $(n, n, 1)$, gdzie n jest liczbą naturalną od 1 do 9. W sumie daje to 17 różnych rozwiązań.

4. Tak, można. Wśród dowolnych trzynastu liczb całkowitych zawsze znajdziemy cztery dające taką samą resztę z dzielenia przez 4 (zasada szufladkowa). Oczywiście ich suma dzieli się przez 4.

5. Ta liczba to 48. Zauważmy, że liczba naturalna, która ma dokładnie 10 dzielników jest albo postaci p^9 dla pewnej liczby pierwszej p (i najmniejszą taką liczbą jest $2^9 = 512$) albo postaci $p^4 \cdot q$, gdzie p i q są dwiema różnymi liczbami pierwszymi (i najmniejszą taką liczbą jest $2^4 \cdot 3 = 48$).

6. Oznaczmy przez S środek okręgów. Ponieważ $\angle ASB = 60°$, a kąty $\angle AXS$, $\angle BYS$ są proste, to $\angle XPY = 360° - 60° - 90° - 90° = 120°$.

7. Suma cyfr liczby w nawiasie wynosi $1 + x$, co jest podzielne przez 3 dla cyfry x równej 2, 5 lub 8.

8. Liczba przekątnych w n-kącie jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$. Liczba ta jest równa 9 dla $n = 6$. Zatem Antek narysował siedmiokąt. Ma on $\frac{7\cdot 4}{2} = 14$ przekątnych.

9. Oznaczmy przez x szukaną liczbę. Z treści zadania mamy $(x + 3) \cdot 2 = 5x$, stąd $x = 2$.

10. Jeżeli woda ma objętość 11V, to lód będzie miał objętość 11V+V=12V. Lód po roztopieniu się zmniejszy swoją objętość o V, czyli o $\frac{1}{12}$ swojej objętości.