

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA V – rok szkolny 2019/2020

poziom: młodzicy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Ile jest liczb naturalnych zapisanych bez użycia zera, których suma cyfr wynosi 6?
2. Marek, Jarek, Asia i Kasia zachęcili do udziału w kółku matematycznym 24 uczniów. Asia zachęciła dwa razy więcej uczniów niż Marek, który zachęcił ich najmniej. Kasia zachęciła mniej uczniów niż Asia, ale więcej niż Jarek. Ilu uczniów zostało zachęconych przez każdego z nich?
3. Owoce jednego gatunku mają tę samą masę. Wiadomo, że 100 jabłek i 100 gruszek ważą tyle samo, co 98 jabłek, 99 gruszek i 15 śliwek oraz tyle samo, co 99 jabłek, 97 gruszek i 20 śliwek. Co jest cięższe: jabłko czy gruszka?
4. Grobowiec Matemachona zbudowany był z kamiennych bloków o wymiarach $1\text{m} \times 1\text{m} \times 20\text{cm}$. Cały grobowiec był w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $23 \times 32 \times 18\text{m}$, zaś w jego środku pozostawiono komorę grobową o wymiarach $11 \times 8 \times 6\text{m}$. Ile kamiennych bloków wykorzystano do budowy grobowca jeśli wiadomo, że do wybudowania grobowca wykorzystano bloki w całości – żadnego z nich nie trzeba było dzielić?
5. W pięciokącie foremnym narysowano wszystkie przekątne. Na powstałym rysunku widać dużo trójkątów. Ile z tych trójkątów ma bok będący przekątną pięciokąta?
6. Pewien czworokąt ma wszystkie boki równe, a jeden z jego kątów jest trzy razy większy od drugiego. Podaj miary kątów tego czworokąta.
7. Jaki kąt tworzą wskazówki zegara o godzinie 11^{20} ?
8. Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe dziesięć razy większe od sumy swoich cyfr.
9. Pierwszy dzień 2020 roku wypada w środę. Ile w wymienionym roku będzie miesięcy takich, że ich 30-te dni wypadną w czwartek?
10. W trójkącie równoramiennym ostrokątnym ABC kąt $\angle ACB$ ma miarę 36° . Bok AB ma długość 8 cm. Kąt $\angle CAB$ podzielono na połowy odcinkiem AD , takim, że punkt D leży na boku BC . Jaka jest długość odcinka AD ?

PMM – rok szkolny 2019/2020 – poziom: młodzicy
RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Jednocyfrową taką liczbą jest tylko 6. Rozważanych liczb dwucyfrowych jest 5 i są to: 15, 24, 33, 42, 51. Liczb dwucyfrowych bez zera w zapisie o sumie cyfr równej $k < 10$ jest $k - 1$, zatem rozważanych liczb trzycyfrowych jest $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. Na liczbę czterocyfrową możemy popatrzeć jak na parę dwóch liczb dwucyfrowych, zatem rozważanych liczb czterocyfrowych jest $1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 10$. Każda rozważana liczba pięciocyfrowa to cztery jedyńki i jedna dwójka, zatem jest ich 5. Liczba sześciocyfrowa to tylko 111111. Wszystkich rozważanych liczb jest $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$.
2. $M \leq J < K < A = 2M$ oraz $3M + J + K = 24$, zatem $5M < 24$ czyli $M \leq 4$. Wiadomo też, że $M + 2M + 2M + 2M = 7M > 24$. Nietrudno wywnioskować, że $M = 4$, stąd $4 \leq J < K < 8$ i $K + J = 12$, zatem $J = 5$, $K = 7$. Ostatecznie liczba uczniów zchęconych przez Marka, Jarka, Asię i Kasię to odpowiednio: 4, 5, 8 i 7.
3. Jeżeli przez j, g, s oznaczymy masy odpowiednio jabłka, gruszki i śliwki, to zdejmując z wagi po tyle samo jabłek i gruszek uzyskujemy równania $2j + g = 15s$ oraz $j + 3g = 20s$. Jeśli na pierwszej wadze obie szalki powiększymy czterokrotnie, a na drugiej trzykrotnie, to mamy $8j + 4g = 60s$ oraz $3j + 9g = 60s$. Czyli 8 jabłek i 4 gruszki ważą tyle samo co 3 jabłka i 9 gruszek. Oznacza to (po zdjęciu z obu szalek 4 gruszek i 3 jabłek), że 5 jabłek waży tyle samo co 5 gruszek, czyli jabłko i gruszka ważą tyle samo.
4. Na każdy metr sześcienny objętości grobowca zużyto 5 bloków. Objętość grobowca (w m^3) wynosi
$$23 \cdot 32 \cdot 18 - 11 \cdot 8 \cdot 6 = 12720.$$
Potrzebnych więc było $12720 \cdot 5 = 63600$ bloków.
5. Przekątnych jest 5. Każda przekątna dzieli pięciokąt na trójkąt T i czworokąt C . I każda przekątna jest bokiem czterech trójkątów: trójkąta T oraz trzech trójkątów zawartych w czworokącie C : dwa z nich mają wszystkie wierzchołki będące wierzchołkami pięciokąta (czyli dwa boki są przekątnymi pięciokąta). W ten sposób naliczylibyśmy $4 \cdot 5 = 20$ trójkątów, jednak część z nich (te których dwa boki są przekątnymi pięciokąta) liczylibyśmy dwukrotnie. Zatem mamy $5 \cdot 2 + 5 \cdot 2/2 = 15$ trójkątów.
6. Czworokąt ten jest rombem. Jego dwa różne kąty mają więc miary, które w sumie dają 180° . Jeśli jeden z nich jest trzy razy większy od drugiego to mniejszy ma 45° , zaś większy 135° . W czworokącie tym są dwa kąty po 45° i dwa po 135° .
7. Jest to kąt $120^\circ + \frac{2}{3} \cdot 30^\circ = 140^\circ$.
8. Szukamy wśród liczb dwucyfrowych podzielnych przez 10. Jest 9 takich liczb: 10, 20, ..., 90. Jak widać każda jest dziesięć razy większa od sumy swoich cyfr.
9. Trzy: styczeń, kwiecień i lipiec. Jeśli pierwszy dzień stycznia to środa, to 30 stycznia będzie w czwartek. Sprawdzamy dzień tygodnia 30 dnia kolejnych miesięcy – pamiętając o tym, że rok 2020 jest przestępny.
10. Kąty przy wierzchołkach A i B są równe 72° , więc trójkąt ACD jest równoramienny i kąt $\angle ADC = 108^\circ$, co oznacza, że kąt $\angle ADB = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. Zatem trójkąt ABD jest równoramienny i $|AB| = |AD| = 8$.