POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: ponadpodstawowy

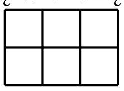
RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. W trójkącie ABC dane są kąty $\measuredangle BAC = 30°$ i $\measuredangle ACB = 50°$. Punkt D leży na boku AB oraz $BD = BC$. Wykazać, że $CD = AB$.
2. Czy prostokąt o proporcji boków 3 : 2 można podzielić na dokładnie 2021 kwadratów?
3. Zegar elektroniczny wyświetla czas w formacie 24 godzinnym $AB : CD$ (tzn. godziny i minuty). Przez ile minut widoczna jest na wyświetlaczu dokładnie jedna cyfra 2?
4. Wiadomo, że liczba 999 999 995 904 ma w rozkładzie dokładnie jeden dzielnik pierwszy trzycyfrowy. Znaleźć ten dzielnik.
5. Na zajęcia przybyły 22 osoby. Okazało się, że nie ma wśród nich takiej trójki osób, że każde dwie się znają. Ile maksymalnie może być par osób, które się znają?
6. Na wyspach Bergamutach podobno jest 8 kotów w butach, 12 uczonych łososiów, 2021 kur samograjek oraz 1959 starych wielorybów. Gdy spotykają się dwa zwierzęta należące do różnych gatunków, to zamieniają się w dwa zwierzęta należące do dwóch pozostałych gatunków. Czy może się zdarzyć, że po pewnym czasie na wyspach Bergamutach będzie tyle samo przedstawicieli każdego gatunku?
7. Wykaż, że dla dowolnej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że liczba $2^n + 3^n + n$ jest podzielna przez p.
8. Dla jakich liczb naturalnych k
$$\frac{k^2 - 15}{k + 6}$$
ma wartość całkowitą?
9. Wyznacz ile zer na końcu ma liczba
$$(21!)^{22} + (22!)^{21}$$
10. W rebusie różne litery odpowiadają różnym cyfrom i wiadomo, że żadna cyfra nie jest zerem.
$$\frac{\text{PĄ}}{\text{CZU}} + \frac{\text{SI}}{\text{EM}} = 7.$$
Jaką liczbą jest $\text{M} + \text{E} + \text{C} + \text{Z}$?

PMM – rok szkolny 2021/2022 – poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. Ponieważ kąt $\angle CDB$ jest kątem przy podstawie równoramiennego trójkąta CDB wiemy, że $\angle CDB = 40°$. Piszemy twierdzenie sinusów w trójkątach ABC oraz ACD. mamy
$$\frac{|AC|}{\sin 100°} = \frac{|AB|}{\sin 50°}$$
$$\frac{|AC|}{\sin 140°} = \frac{|CD|}{\sin 30°}$$
Równania te dają
$$\frac{|AB|}{\sin 50°} \sin 100° = \frac{|CD|}{\sin 30°} \sin 140°,$$
a po prostych przekształceniach trygonometrycznych mamy tezę.

2. Kwadraty oczywiście nie muszą być równe. Jednym ze sposobów jest wykazanie, że kwadrat można podzielić na dowolną wiekszą niż 5 liczbę kwadratów, a więc naturalny podział prostokąta na sześć kwadratów  można łatwo odpowiednio rozdrobnić.

3. Pełne godziny: $02, 12, 20, 21, 23$, mają po 45 minut takich, że nie ma tam dwójki. W osiemnastu godzinach bez dwójki jest czternaście minut takich, które mają dokładnie jedną dwójkę. Daje to łącznie $5 \cdot 45 + 18 \cdot 14 = 477$ minut.

4. Można żmudnie znaleść wszystkie mniejsze dzielniki rozkładu: $2^{16} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 601$ lub zauważyć, że ta liczba to $10^{12} - 2^{12}$ i rozłożyć ją sprytnie dzięki wzorom skróconego mnożenia

5. Maksymalna liczba "znajomości" to 121, gdy mamy dwie grupy po 11 osób nie znających sie nawzajem, ale znających wszystkie osoby z pozostałej grupy.

   Uzasadnimy, że to optymalna konfiguracja. Niech X będzie osobą z maksymalną liczbą k znajomych wśród wszystkich obecnych. Wówczas z danych zadania wynika, że ci znajomi X nie mogą już znać się nawzajem. Każdy z nich ma więc znajomych tylko wśród pozostałych $22 - k$ osób. Każda z pozostałych $22 - k$ osób (w tym X) ma nie więcej niż k znajomych. Wszystkich znajomości jest zatem co najwyżej
$$\frac{(22 - k) \cdot k + k \cdot (22 - k)}{2} = k(22 - k).$$
   Funkcja ta przyjmuje największą wartość 121 dla $k = 11$.

   Podanie samej optymalnej konfiguracji bez uzasadnienia jej optymalności należy uznać za zadanie rozwiązane ale można za to rozwiązanie przyznać 6 punktów.

6. To nie jest możliwe, gdyż w wyniku każdej zamiany liczności dokładnie dwóch gatunków są liczbami nieparzystymi, a dwóch parzystymi.

7. Jeśli $p = 2$ lub $p = 3$, to $n = 1$ jest dobre. Gdy $p > 3$, to 2^{p-1} oraz 3^{p-1} dają resztę 1 z dzielenia przez p. Podobnie zatem $2^{2(p-1)}$ i $3^{2(p-1)}$, a więc $n = 2(p-1)$ będzie taką liczbą, że $2^n + 3^n + n$ dzieli się przez p.

8. $$\frac{k^2-15}{k+6} = \frac{k^2-36}{k+6} + \frac{21}{k+6} = k-6+\frac{21}{k+6}$$

   $k+6$ musi zatem być dzielnikiem 21, który jednocześnie jest nie mniejszy niż 6, a zatem jest jedną z liczb 7 lub 21, a zatem k jest jedną z liczb 1 lub 15.

9. Zarówno 21! jak i 22! kończą się czterema zerami, bo mają dokładnie 4 czynniki podzielne przez 5 i żadnego podzielnego przez 25. Zatem liczba $(21!)^{22}$ kończy się 88 zerami, a $(22!)^{21}$ osiemdziesięcioma czterema zerami, a jej ostatnia niezerowa cyfra jest też ostatnią niezerową cyfrą liczby z zadania. Liczba z zadania ma na końcu 84 zera.

10. Rebus ma rozwiązanie
    $$\frac{95}{247} + \frac{86}{13} = 7,$$
    gdzie wszystkie cyfry są niezerowe. Wówczas $\mathrm{M} + \mathrm{E} + \mathrm{C} + \mathrm{Z} = 10$. Prawdopodobnie przy założeniu istnienia rozwiązania można uzasadnić szacując wynik, że litery M, E, C, Z, to muszą być te najmniejsze.