POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Liczba n jest liczbą trzycyfrową, najmniejszą spośród 71 kolejnych liczb naturalnych i taką, że jest dzielnikiem sumy wszystkich wymienionych liczb. Znajdź wszystkie liczby n spełniające warunki zadania.

2. Dwusieczne sąsiednich kątów prostokąta o bokach długości 3 i 7 przecinają się w punktach X, Y, Z, T. Oblicz pole czworokąta $XYZT$.

3. Oznaczmy $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$ dla liczby naturalnej n. Pokaż, że $S_{2n} - S_n > \frac{1}{4}$ dla $n > 4$.

4. Ile par liczb całkowitych spełnia równanie $x^2 + y^2 = 4x - 2y - 3$?

5. Schody mają 12 stopni. Na ile sposobów można je pokonać, pokonując w każdym kroku dokładnie jeden lub dokładnie trzy stopnie?

6. Jaka jest największa potęga liczby 22, która dzieli liczbę 2022!?

7. Obcinamy naroża kwadratu tak, aby otrzymać ośmiokąt foremny. Pokaż, że zmniejszamy pole kwadratu w tej samej proporcji, w jakiej zmniejszamy jego obwód.

8. Załóżmy, że funkcja $f(x) = \cos ax + \cos bx$ jest okresowa. Pokaż, że $b = 0$ lub liczba $\frac{a}{b}$ jest wymierna.

9. Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego opisanego na okręgu, wiedząc że punkt styczności ramienia z okręgiem dzieli to ramię na odcinki długości 4 i 9.

10. Wielomian P spełnia dla każdego x zależność $P(x^2 + 1) = x^4 - 4x^2 + 4$. Ile wynosi $P(x^2 + 3)$?

PMM – rok szkolny 2021/2022 – poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Niech n będzie szukaną liczbą. Wtedy $n|(n+35)\cdot 71$, czyli $n|5\cdot 7\cdot 71$. Ponieważ n jest liczbą trzycyfrową, to $n = 5\cdot 71 = 355$ lub $n = 7\cdot 71 = 497$.

2. Czworokąt $XYZT$ jest kwadratem (można powołać się na symetrię względem prostej XZ) o przekątnej długości równej różnicy długości boków prostokąta, zatem szukane pole wynosi $\frac{1}{2}(7-3)^2 = 8$.

3. Mamy
$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} + \cdots + \frac{1}{4n+1} \geqslant \frac{1}{2n+3} + \frac{n-1}{4n+1} = \\ = \frac{2n^2+5n-2}{8n^2+14n+3} \geqslant \frac{2n^2+4n+3}{8n^2+14n+3} > \frac{1}{4},$$
bo $5n-2 \geqslant 4n+3$ dla $n \geqslant 5$.

4. Możemy przekształcić równanie do postaci $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$, a to oznacza, że oba nawiasy muszą być co do wartości bezwzględnej równe 1. Mamy więc cztery pary (x,y): $(1,-2)$, $(1,0)$, $(3,-2)$, $(3,0)$.

5. Na stopnie o numerach 1 i 2 można wejść tylko na jeden sposób. Na stopień numer 3 już na dwa sposoby — wykonując trzy małe kroki lub jeden duży. Następnie na stopień o numerze n można wejść bezpośrednio ze stopnia $n-1$ lub bezpośrednio ze stopnia $n-3$, więc liczby sposobów wejścia dodają się. Daje to dla kolejnych stopni liczby sposobów równe $3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60$. Zatem na dwunasty stopień można wejść na 60 sposobów.

   Alternatywny sposób liczenia. Zauważamy, że liczba kroków musiała być parzysta i pomiędzy 4 a 12, gdy było wśród nich odpowiednio $4, 3, 2, 1, 0$ kroków długich. Liczba sposobów jest więc równa
$$\binom{4}{4} + \binom{6}{3} + \binom{8}{2} + \binom{10}{1} + \binom{12}{0} = 1 + 20 + 28 + 10 + 1 = 60.$$

6. Liczba 22 jest iloczynem 2 i 11, a więc trzeba obliczyć, z jaką potęgą w iloczyn 2022! wchodzi liczba 11, bo dla liczby 2 ta potęga będzie większa. W iloczynie $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2022$ są 183 liczby podzielne przez 11 $(11\cdot 183 = 2013)$, w tym 16 podzielnych przez 121 $(121\cdot 16 = 1936)$, a jedna podzielna przez $1331 = 11^3$. Zatem szukana potęga to
$$22^{183+16+1} = 22^{200}.$$

7. Możemy założyć, że bok kwadratu ma długość 1. Niech x oznacza przyprostokątną odciętych trójkątów, a b – bok ośmiokąta. Wtedy $b = 1 - 2x = x\sqrt{2}$. Z tego równania $x = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = (2-\sqrt{2})/2$. Mamy wówczas pole równe $1 - 2x^2 = 2\sqrt{2} - 2$, a obwód równy $8b = 8 - 16x = 8\sqrt{2} - 8$. Zachodzi
$$\frac{8\sqrt{2}-8}{4} = \frac{2\sqrt{2}-2}{1} = 2\sqrt{2} - 2.$$

8. Załóżmy, że $b \neq 0$ oraz $f(x+T) = f(x)$ dla $x \in (-\infty, \infty)$ oraz pewnego $T > 0$. Mamy $2 = f(0) = f(T) = \cos aT + \cos bT$, zatem $\cos aT = \cos bT = 1$. Wynika stąd, że $aT = 2n\pi,\ bT = 2k\pi$ dla pewnych liczb całkowitych n oraz $k \neq 0$. Mamy stąd $\frac{a}{b} = \frac{n}{k}$.

9. Obwód wynosi $4 \cdot (4+9) = 52$, co otrzymujemy natychmiast z twierdzenia o odcinkach stycznych (podstawy trapezu mają długości 8 i 18). Aby otrzymać pole trójkąta, potrzebujemy jeszcze obliczyć wysokość trapezu z twierdzenia Pitagorasa: $h^2 = (4+9)^2 - \left(\frac{18-8}{2}\right)^2 = 12^2$. Zatem pole wynosi $12 \cdot (8+18)/2 = 156$.

10. $P(x^2+1) = x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2-2)^2 = ((x^2+1)-3)^2$. Możemy wnioskować, że $P(t) = (t-3)^2$ dla $t > 1$, a więc także dla pozostałych t, ale uzasadniać tego nie trzeba. Zatem $P(x^2+3) = ((x^2+3)-3)^2 = x^4$.