

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Wykaż, że liczba $\sqrt{11 - 4\sqrt{7}} - \sqrt{7}$ jest całkowita.
2. Ze zbioru kolejnych liczb naturalnych $\{1, 2, 3, \dots, 2021\}$ losujemy dwie różne liczby (jednocześnie). Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb będzie równa co najmniej 2021.
3. W czworokącie $ABCD$ kąt BAD ma miarę 135° oraz przekątna AC dzieli go na dwa trójkąty prostokątne o wspólnej przeciwprostokątnej. Oblicz $\frac{|AC|}{|BD|}$.
4. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c funkcja kwadratowa
$$f(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$$
ma co najmniej jedno miejsce zerowe.
5. Wykaż, że jeśli liczby całkowite x, y, z spełniają równanie $x^2 + y^2 + z^2 = 2022$, to co najwyżej jedna z nich jest parzysta.
6. Odległość wierzchołka sześcianu od przekątnej sześcianu (do której dany wierzchołek nie należy) jest równa a . Oblicz objętość sześcianu.
7. Rozwiąż nierówność $\sqrt{4x - x^2} \geq 2 - x$.
8. Styczne do okręgu $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$, które są równoległe do prostej $2x + y - 3 = 0$, przecinają prostą $x - 2y + 1 = 0$ w punktach M i N . Oblicz długość odcinka MN .
9. Rozważamy ciąg arytmetyczny o nieparzystej liczbie wyrazów, w którym numeracja wyrazów zaczyna się od 1. Wiadomo, że suma wyrazów o indeksach parzystych wynosi 42, zaś suma wyrazów o indeksach nieparzystych wynosi 48. Wyznacz liczbę wyrazów tego ciągu.
10. Podaj, dla jakich wartości parametru m równanie $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{m}{m-1}$ ma rozwiązanie.