POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Wykaż, że liczba $\sqrt{11-4\sqrt{7}}-\sqrt{7}$ jest całkowita.
2. Ze zbioru kolejnych liczb naturalnych $\{1, 2, 3, \ldots, 2021\}$ losujemy dwie różne liczby (jednocześnie). Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb będzie równa co najmniej 2021.
3. W czworokącie $ABCD$ kąt BAD ma miarę 135° oraz przekątna AC dzieli go na dwa trójkąty prostokątne o wspólnej przeciwprostokątnej. Oblicz $\frac{|AC|}{|BD|}$.
4. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c funkcja kwadratowa
$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$
ma co najmniej jedno miejsce zerowe.
5. Wykaż, że jeśli liczby całkowite x, y, z spełniają równanie $x^2+y^2+z^2 = 2022$, to co najwyżej jedna z nich jest parzysta.
6. Odległość wierzchołka sześcianu od przekątnej sześcianu (do której dany wierzchołek nie należy) jest równa a. Oblicz objętość sześcianu.
7. Rozwiąż nierówność $\sqrt{4x-x^2} \geqslant 2-x$.
8. Styczne do okręgu $x^2+y^2-4x+2y-7=0$, które są równoległe do prostej $2x+y-3=0$, przecinają prostą $x-2y+1=0$ w punktach M i N. Oblicz długość odcinka MN.
9. Rozważamy ciąg arytmetyczny o nieparzystej liczbie wyrazów, w którym numeracja wyrazów zaczyna się od 1. Wiadomo, że suma wyrazów o indeksach parzystych wynosi 42, zaś suma wyrazów o indeksach nieparzystych wynosi 48. Wyznacz liczbę wyrazów tego ciągu.
10. Podaj, dla jakich wartości parametru m równanie $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{m}{m-1}$ ma rozwiązanie.

PMM – rok szkolny 2021/2022 – poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Ponieważ $11 - 4\sqrt{7} = 2^2 + (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7} = (\sqrt{7} - 2)^2$ i $\sqrt{7} > 2$, to rozważana liczba jest równa -2.

2. Mniejszą z wylosowanych liczb oznaczmy przez a, większą przez b. Policzmy ile jest par (a, b) takich, że $a + b > 2020$. Oczywiście $b > \max\{a, 2020 - a\}$ i możliwych wartości dla b jest $2021 - \max\{a, 2020 - a\}$ dla ustalonego $a < 2021$. Rozważając kolejne $a = 1, 2, \ldots, 2020$ otrzymujemy, że wszystkich takich par jest $(2 + 3 + \cdots + 1011) + (1010 + 1009 + \cdots + 1) = 1010 \cdot 1012$. Ponieważ liczba wszystkich wyników losowania jest równa $2021 \cdot 1010$, to szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1012}{2021}$. Podwojony licznik różni się od mianownika o 3, zatem ułamek ten jest nieskracalny.

3. Ponieważ dwa kąty przeciwległe rozważanego czworokąta są proste, to na tym czworokącie można opisać okrąg o średnicy AC. Środek tego okręgu leży po tej samej stronie cięciwy BD co punkt C, bo kąt BCD jest ostry. Z twierdzenia o kątach wpisanych w okrąg wynika, że dla dowolnego punktu C' należącego do łuku BD zawierającego C kąt $BC'D$ ma miarę $45°$. Ustalmy taki punkt C', że $C'D$ jest średnicą rozważanego okręgu. Wtedy kąt $C'BD$ jest prosty, zatem $C'D = BD\sqrt{2}$. Ponieważ $AC = C'D$, to szukany stosunek wynosi $\sqrt{2}$.

4. Ze względu na symetrię możemy założyć bez straty ogólności, że $a \leqslant b \leqslant c$. Mamy $f(a) = (a - b)(a - c) \geqslant 0 \geqslant (b - c)(b - a) = f(b)$, zatem $f(x) = 0$ dla pewnego $x \in [a, b]$.

5. Jeżeli dwie z tych liczb są parzyste, a jedna nieparzysta, to lewa strona równania jest liczbą nieparzystą, a prawa parzystą, więc równości być nie może. Jeśli wszystkie trzy liczby są parzyste, to lewa strona równania jest podzielna przez 4, a prawa nie. Teza jest wykazana. Zauważmy ponadto, że wszystkie trzy liczby nie mogą być nieparzyste. Stąd wniosek, że dokładnie jedna z nich jest parzysta.

6. Rozważmy trójkąt prostokątny, którego bokami są krawędź, przekątna ściany i przekątna sześcianu. Jeżeli x jest krawędzią sześcianu, to boki tego trójkąta mają długości $x,\ x\sqrt{2},\ x\sqrt{3}$. Ponadto jego wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego jest równa a. Obliczając pole tego trójkąta na dwa sposoby, otrzymujemy $x = a\sqrt{\frac{3}{2}}$, zatem objętość sześcianu wynosi $\frac{3a^3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

7. Zapis badanej nierówności ma sens tylko dla $x \in [0, 4]$. Jeżeli $x \in [2, 4]$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, a prawa niedodatnia, zatem przedział $[2, 4]$ jest zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności. Rozważmy przypadek $x \in [0, 2]$, wtedy rozważana nierówność jest równoważna następującej: $4x - x^2 \geqslant (2 - x)^2$, czyli: $x^2 - 4x + 2 \leqslant 0$. Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest przedział $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$, zatem przedział $[2 - \sqrt{2}, 2]$ jest częścią zbioru rozwiązań rozważanej nierówności. Ostatecznie, poszukiwany zbiór rozwiązań to przedział $[2 - \sqrt{2}, 4]$.

8. Ponieważ proste wymienione w treści zadania są prostopadłe, to szukana długość jest średnicą okręgu. Zapisując równanie okręgu w postaci $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 12$, widzimy, że jego średnica ma długość $4\sqrt{3}$.

9. Niech a będzie pierwszym wyrazem ciągu, r jego różnicą, a $2n + 1$ ilością wyrazów. Suma wyrazów o numerach nieparzystych wynosi $\frac{a+a+2nr}{2} \cdot (n + 1) = (a + nr)(n + 1) = 48$, a

suma wyrazów o numerach parzystych wynosi $\frac{a+r+a+(2n-1)r}{2} \cdot n = (a+nr)n = 42$. Dzieląc te równości stronami, otrzymujemy $\frac{n+1}{n} = \frac{48}{42} = \frac{8}{7}$, zatem $n = 7$. Ciąg ma 15 wyrazów.

10. Lewą stronę równania możemy zapisać jako: $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$ i równanie przyjmuje postać: $\sin^2 2x = \frac{-2}{m-1}$. Posiada ono rozwiązanie, jeżeli $0 \leqslant \frac{-2}{m-1} \leqslant 1$, co oznacza $m \leqslant -1$.