

## POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: ponadpodstawowy

### RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ IV

1. Ile jest czterocyfrowych liczb naturalnych, których zapis dziesiętny składa się z trzech różnych cyfr?
2. Znajdź równanie tej stycznej do okręgów  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$  i  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$ , która rozdziela ich środki (tzn. środki okręgów leżą po różnych stronach tej prostej).
3. Na boku  $BC$  trójkąta równobocznego  $ABC$  obrano taki punkt  $P$ , że pole trójkąta  $ACP$  jest dwa razy mniejsze od pola trójkąta  $ABP$ . Oblicz sinus kąta  $CAP$ .
4. Udowodnij, że jeżeli liczba całkowita  $n$  nie jest podzielna przez 3, to wyrażenie  $n^4 - 17n^2 + 997$  jest podzielne przez 9.
5. Określ, dla jakich wartości parametru  $a$  zbiór rozwiązań nierówności  $ax + 4 \geq 0$  z niewiadomą  $x$  zawiera przedział  $(-\infty, 2)$ .
6. Uzasadnij, że jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa trójkątnego tworzą z podstawą kąty o równych miarach, to spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.
7. Liczby  $a + b$ ,  $2a + 3b$ ,  $4a + b^2 + 3b$  tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz te wartości  $b$ , dla których ciąg ten jest rosnący.
8. Liczbę naturalną nazywamy palindromiczną, jeżeli nie zmienia się po zapisaniu jej cyfr w odwrotnej kolejności (np. liczbami palindromicznymi są liczby 434, 1221, 123321). Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana liczba sześciocyfrowa jest liczbą palindromiczną.
9. Liczba wszystkich przekątnych podstaw i ścian bocznych pewnego graniastoslupa jest równa 110. Oblicz, ile ścian ma ten graniastoslup.
10. Wykaż, że jeżeli  $(\sin \alpha + \cos \alpha)$  jest liczbą wymierną, to wymierna jest również liczba  $\cos(4\alpha)$ .