POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ IV

1. Ile jest czterocyfrowych liczb naturalnych, których zapis dziesiętny składa się z trzech różnych cyfr?
2. Znajdź równanie tej stycznej do okręgów $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ i $(x-3)^2+(y+1)^2=9$, która rozdziela ich środki (tzn. środki okręgów leżą po różnych stronach tej prostej).
3. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt P, że pole trójkąta ACP jest dwa razy mniejsze od pola trójkąta ABP. Oblicz sinus kąta CAP.
4. Udowodnij, że jeżeli liczba całkowita n nie jest podzielna przez 3, to wyrażenie n^4-17n^2+997 jest podzielne przez 9.
5. Określ, dla jakich wartości parametru a zbiór rozwiązań nierówności $ax+4 \geqslant 0$ z niewiadomą x zawiera przedział $(-\infty, 2\rangle$.
6. Uzasadnij, że jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa trójkątnego tworzą z podstawą kąty o równych miarach, to spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.
7. Liczby $a+b$, $2a+3b$, $4a+b^2+3b$ tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz te wartości b, dla których ciąg ten jest rosnący.
8. Liczbę naturalną nazywamy palindromiczną, jeżeli nie zmienia się po zapisaniu jej cyfr w odwrotnej kolejności (np. liczbami palindromicznymi są liczby 434, 1221, 123321). Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana liczba sześciocyfrowa jest liczbą palindromiczną.
9. Liczba wszystkich przekątnych podstaw i ścian bocznych pewnego graniastosłupa jest równa 110. Oblicz, ile ścian ma ten graniastosłup.
10. Wykaż, że jeżeli $(\sin\alpha + \cos\alpha)$ jest liczbą wymierną, to wymierna jest również liczba $\cos(4\alpha)$.

PMM – rok szkolny 2021/2022 – poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ IV

1. Pierwszą cyfrę możemy wybrać na 9 sposobów. Załóżmy, że wybraliśmy pierwszą cyfrę. Jeżeli ta cyfra powtarza się, to drugą pozycję dla niej możemy wybrać na trzy sposoby, a pozostałe dwa miejsca musimy zapełnić różnymi cyframi różniącymi się także od wybranej, czyli na $9 \cdot 8$ sposobów. W ten sposób otrzymamy 1944 liczby. Jeżeli pierwsza cyfra nie powtarza się, to wybieramy cyfrę (która ma się nie powtarzać) różną od pierwszej i miejsce dla niej na 27 sposobów oraz trzecią cyfrę (którą zapisujemy na dwóch pozostałych pozycjach) na 8 sposobów. Otrzymujemy następne 1944 liczby. Ostatecznie otrzymaliśmy 3888 liczb.

   Inne rozwiązanie: Zapis takiej liczby musi być postaci $aabc$, $abac$, $abca$, $abbc$, $abcb$ lub $abcc$, gdzie a, b, c są różnymi cyframi oraz a nie może być zerem. Zatem takich liczb jest $6 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 3888$.

2. Ponieważ odległość między środkami okręgów równa jest sumie promieni, to okręgi te są styczne zewnętrznie. Ponieważ punkt styczności dzieli w stosunku 2:3 wektor $\mathbf{a} = [4, -3]$ wyznaczony przez środki okręgów, to punktem styczności jest $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. Prosta styczna do obu okręgów w tym punkcie jest prostopadła do wektora $\mathbf{a}$, zatem jej równaniem jest $4(x - \frac{3}{5}) - 3(y - \frac{4}{5}) = 0$ czyli inaczej $4x - 3y = 0$. Jest to jedyna prosta styczna spełniająca warunki zadania.

3. Bez straty ogólności możemy założyć, że długości boków trójkąta wynoszą 1. Ze stosunku pól wynika, że $CP = \frac{1}{3}$. Twierdzenie cosinusów dla trójkąta ACP daje $AP = \frac{\sqrt{7}}{3}$, a z twierdzenia sinusów dla tegoż trójkąta dostajemy $\sin \measuredangle CAP = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

4. Ponieważ badane wyrażenie jest równe $n^4 - 17n^2 + 997 = n^4 + n^2 - 2 + 9(111 - 2n^2)$, to wystarczy pokazać, że jeśli liczba całkowita n nie jest podzielna przez 3, to 9 dzieli $n^4 + n^2 - 2 = (n^2 + 2)(n^2 - 1)$. Wiadomo, że jeśli 3 nie dzieli n, to reszta z dzielenia n^2 przez 3 wynosi 1, co oznacza, że oba otrzymane czynniki są podzielne przez 3, a to kończy dowód.

5. Należy znaleźć takie parametry a, że jeżeli $x \leqslant 2$, to $ax + 4 \geqslant 0$. Oczywiście może być $a = 0$, ale nie może być $a > 0$, bo dla $x = \frac{-5}{a}$ implikacja nie byłaby spełniona. Załóżmy, że $a < 0$, wtedy rozważana nierówność przyjmuje postać $x \leqslant \frac{-4}{a}$ i powyższa implikacja jest prawdziwa, gdy $\frac{-4}{a} \geqslant 2$ czyli $a \geqslant -2$. Ostatecznie, $a \in [-2, 0]$.

6. Ponieważ wszystkie trójkąty utworzone przez wysokość ostrosłupa i jego krawędź boczną mają takie same kąty i wspólny bok, to są przystające. Oznacza to, że odcinki łączące spodek wysokości ostrosłupa z wierzchołkami podstawy mają równe długości, a to daje tezę.

7. Podany ciąg jest arytmetyczny, gdy $a + b + 4a + b^2 + 3b = 2(2a + 3b)$, czyli $a = 2b - b^2$. Ciąg ten jest ponadto rosnący, gdy $a + 2b > 0$, czyli $4b - b^2 > 0$, co oznacza, że $b \in (0, 4)$.

8. Sześciocyfrowa liczba palindromiczna jest wyznaczona przez trzy pierwsze cyfry, zatem takich liczb jest $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$. Wszystkich liczb sześciocyfrowych jest 900000, więc obliczane prawdopodobieństwo wynosi $0,001$.

9. Jeżeli podstawą danego graniastosłupa jest $n-$kąt, to mamy $2n$ przekątnych ścian bocznych oraz $2 \cdot \frac{n(n-3)}{2} = n^2 - 3n$ przekątnych podstaw. Zatem $110 = n^2 - n = n(n-1)$, czyli $n = 11$. Oznacza to, że graniastosłup ma 13 ścian.

10. Oznaczmy $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$. Wiemy, że $s+c$ jest liczbą wymierną, więc $(s+c)^2 = 1+2sc$ oraz sc także są liczbami wymiernymi. Mamy $\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = (c^2 - s^2)^2 - 4c^2s^2 = (c^2 + s^2)^2 - 8s^2c^2 = 1 - 8(sc)^2$, zatem ta liczba również jest liczbą wymierną.