

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: ponadpodstawowy

FINAŁ

1. Pięć drużyn wzięło udział w turnieju piłki halowej. Każda drużyna rozegrała z każdą jeden mecz. Przyznawano 2 punkty za zwycięstwo i 1 punkt za remis. Okazało się, że zwycięska drużyna nie zanotowała remisów, drużyna na drugim miejscu nie przegrała żadnego meczu, a każda z drużyn zdobyła inną liczbę punktów. Podaj z uzasadnieniem zdobyte sumy punktów.
2. Na każdym polu szachownicy 8×8 położono monetę reszką do góry. W jednym ruchu można obrócić na drugą stronę dokładnie trzy monety na polach sąsiadujących w jednym rzędzie lub kolumnie. Czy za pomocą takich ruchów uda się doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie monety leżą orłem do góry?
3. Plansza do gry składa się z 22 pól ustawionych w kółko. Ruch polega na zakolorowaniu jednego lub dwóch sąsiednich niezakolorowanych pól. Wygra ten, kto zakoloruje ostatnie pole. Adam zaczyna, a Basia koloruje jako druga. Oboje grają doskonale, kto zatem wygra?
4. Z paczki ziarna, w której było 20% zanieczyszczeń, usunięto 3 kg zanieczyszczeń i teraz zanieczyszczenia stanowią tylko 4%. Jaki procent zanieczyszczeń pozostałby, gdyby usunięto tylko 2 kg zanieczyszczeń?
5. Pokaż, że nie istnieje takie niecałkowite dodatnie x , że $x + \frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą, a $x^3 + \frac{1}{x^3}$ jest liczbą pierwszą.
6. Długości boków trójkąta prostokątnego wyrażają się liczbami całkowitymi. Uzasadnij, że długość przynajmniej jednej z przyprostokątnych dzieli się przez 3.
7. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach długości 1 i $\sqrt{2}$, a dodatkowo wszystkie krawędzie boczne mają długość 1. Określ, czy kąt między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi ma więcej niż 120° .
8. Jacek pomyślał o pewnym wielomianie $P(x)$ o współczynnikach będących dodatnimi liczbami całkowitymi. Antek próbuje odgadnąć wzór na $P(x)$, ale może zadawać jedynie pytania o wartość $P(x)$ dla konkretnych x . Pierwsze pytanie Antka brzmiało: „Ile wynosi $P(1)$?” i odpowiedź Jacka była 7. Ile jeszcze pytań (co najmniej) musi zadać Antek, aby odgadnąć wzór na $P(x)$?
9. Znajdź wszystkie liczby naturalne n , dla których kwadrat zbudowany z 36 jednostkowych kwadracików można rozciąć na dokładnie n prostokątów o parami różnych polach i o bokach, których długości są liczbami naturalnymi. Podaj przykłady takich rozcięć, dla każdej z wyznaczonych wartości n .
10. Punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$. Odcinki łączące P ze środkami boków dzielą $ABCD$ na cztery parami podobne czworokąty. Ponadto długości odpowiednich boków łączących P ze środkami AB i BC są równe połowom tych boków. Pokaż, że $ABCD$ jest rombem.