POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: ponadpodstawowy

FINAŁ

1. Pięć drużyn wzięło udział w turnieju piłki halowej. Każda drużyna rozegrała z każdą jeden mecz. Przyznawano 2 punkty za zwycięstwo i 1 punkt za remis. Okazało się, że zwycięska drużyna nie zanotowała remisów, drużyna na drugim miejscu nie przegrała żadnego meczu, a każda z drużyn zdobyła inną liczbę punktów. Podaj z uzasadnieniem zdobyte sumy punktów.

2. Na każdym polu szachownicy 8×8 położono monetę reszką do góry. W jednym ruchu można obrócić na drugą stronę dokładnie trzy monety na polach sąsiadujących w jednym rzędzie lub kolumnie. Czy za pomocą takich ruchów uda się doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie monety leżą orłem do góry?

3. Plansza do gry składa się z 22 pól ustawionych w kółko. Ruch polega na zakolorowaniu jednego lub dwóch sąsiednich niezakolorowanych pól. Wygra ten, kto zakoloruje ostatnie pole. Adam zaczyna, a Basia koloruje jako druga. Oboje grają doskonale, kto zatem wygra?

4. Z paczki ziarna, w której było 20% zanieczyszczeń, usunięto 3 kg zanieczyszczeń i teraz zanieczyczczenia stanowią tylko 4%. Jaki procent zanieczyszczeń pozostałby, gdyby usunięto tylko 2 kg zanieczyszczeń?

5. Pokaż, że nie istnieje takie niecałkowite dodatnie x, że $x + \dfrac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą, a $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ jest liczbą pierwszą.

6. Długości boków trójkąta prostokątnego wyrażają się liczbami całkowitymi. Uzasadnij, że długość przynajmniej jednej z przyprostokątnych dzieli się przez 3.

7. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach długości 1 i $\sqrt{2}$, a dodatkowo wszystkie krawędzie boczne mają długość 1. Określ, czy kąt między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi ma więcej niż $120°$.

8. Jacek pomyślał o pewnym wielomianie $P(x)$ o współczynnikach będących dodatnimi liczbami całkowitymi. Antek próbuje odgadnąć wzór na $P(x)$, ale może zadawać jedynie pytania o wartość $P(x)$ dla konkretnych x. Pierwsze pytanie Antka brzmiało: „Ile wynosi $P(1)$?" i odpowiedź Jacka była 7. Ile jeszcze pytań (co najmniej) musi zadać Antek, aby odgadnąć wzór na $P(x)$?

9. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których kwadrat zbudowany z 36 jednostkowych kwadracików można rozciąć na dokładnie n prostokątów o parami różnych polach i o bokach, których długości są liczbami naturalnymi. Podaj przykłady takich rozcięć, dla każdej z wyznaczonych wartości n.

10. Punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$. Odcinki łączące P ze środkami boków dzielą $ABCD$ na cztery parami podobne czworokąty. Ponadto długości odpowiednich boków łączących P ze środkami AB i BC są równe połowom tych boków. Pokaż, że $ABCD$ jest rombem.

PMM – rok szkolny 2021/2022 – poziom: PONADPODSTAWOWY

RUNDA ELIMINACYJNA – FINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Nazwijmy drużyny A, B, C, D, E w kolejności malejącej zdobytej liczby punktów. Rozegrano 10 meczów, a więc było 20 punktów do zdobycia. Drużyna A przegrała z drużyną B, a więc zdobyła nie więcej niż 6 punktów. Ponieważ $6+5+4+3+2 = 20$, to pozostałe drużyny musiały zdobyć dokładnie 5, 4, 3 i 2 punkty. Wypada jeszcze uzasadnić, że taki rozkład jest możliwy do uzyskania. Przykład: remisy w meczach BC, BD, BE, CD, DE oraz A wygrała z C, D i E, C wygrała z E, B wygrała z A.

2. Nie uda się. Zaznaczmy pola co trzeciej przekątnej tak, by było zaznaczonych 21 pól. Wtedy pól niezaznaczonych pozostanie 43, a każdy ruch odwraca dokładnie dwie monety na niezaznaczonych polach. To oznacza, że na niezaznaczonych polach będzie wciąż nieparzysta liczba reszek, a więc nie same orły.

3. Wygra Basia. Adam "rozetnie" kółko, pozostawiając pasek złożony z 20 albo 21 pól. W pierwszym przypadku Basia koloruje dwa środkowe pola, pozostawiając dwa paski po 9 pól, a następnie powtarza ruchy Adama na drugim pasku. Podobnie w drugim przypadku: Basia koloruje środkowe pole, zostawiając dwa paski długości 10 i może naśladować ruchy Adama, utrzymując symetrię.

4. Oznaczmy M – masę ziarna i Z – masę zanieczyszczeń pozostałych po usunięciu trzech kilogramów. Mamy
$$Z = 0,04M \text{ oraz } Z + 3 = 0,2(M + 3).$$
Stąd $M = 15$ kg, a $Z = 0,6$ kg. Gdyby usunąć tylko 2 kilogramy zanieczyszczeń, mielibyśmy $1,6$ kg zanieczyszczeń w 16 kilogramach ziarna, a więc dokładnie 10%.

5. Niech $n = x+\frac{1}{x}$. Mamy wtedy $x^3+\frac{1}{x^3} = n^3-3n = n(n^2-3)$. Gdyby to była liczba pierwsza, to któryś z czynników musiałby być równy 1. Jeśli $n = 1$, to w ostatniej równości mamy dodatnią liczbę równą ujemnej, a gdy $n^2 - 3 = 1$, to $n = 2$ i $x = 1$, a więc x jest całkowite.

6. Przypuśćmy, że żadna z przyprostokątnych nie dzieli się przez 3. Wówczas jej kwadrat daje resztę 1 z dzielenia przez 3, a więc zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa kwadrat przeciwprostokątnej musiałby dawać resztę 2 przy dzieleniu przez 3, a to jest niemożliwe.

7. Oznaczmy przez A, B, C, D kolejne wierzchołki podstawy tak, że $AB = 1$. Niech S oznacza wierzchołek ostrosłupa, X – środek krawędzi AS, Y – środek krawędzi AD. Ponieważ kąt ASD jest prosty, to proste AS i XY są prostopadłe. Proste AS i XB są prostopadłe, bo trójkąt ABS jest równoboczny. Wynika z tego, że kąt $\alpha = BXY$ jest kątem między ścianami bocznymi ostrosłupa. Mamy $BX = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $XY = \frac{1}{2}$. Rozważając trójkąt prostokątny ABY, otrzymamy $BY = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BXY otrzymujemy $\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}} < \frac{-1}{2} = \cos 120°$. Wynika stąd, że $\alpha > 120°$. Rozważany kąt ma więcej niż 120°.

8. Wystarczy spytać „Ile wynosi $P(10)$?”. Ponieważ $P(1)$ jest sumą współczynników wielomianu, które są nieujemne, to każdy ze współczynników jest mniejszy od 10, zatem jest zerem lub liczbą jednocyfrową. Stąd wniosek, że jeżeli zapiszemy liczbę $P(10)$ w postaci dziesiętnej, to cyfry tej liczby (licząc od prawej) są kolejnymi współczynnikami rozważanego wielomianu (licząc od najmniejszej potęgi).

9. $n \in \{2, .., 7\}$ ($n = 1$ też można uznać). Suma liczb od 1 do 8 wynosi 36, więc więcej niż 8 się nie da, a nie można też wyciąć prostokąta o polu 7, więc 8 jest również niemożliwe. Pozostaje podać przykłady rozcięć dla sześciu przypadków.

Najtrudniejsze są chyba rozcięcia na dokładnie 7 części. Można ułożyć ten kwadrat na przykład z prostokątów 1×1, 1×2, 3×1, 2×2, 5×1, 3×3, 6×2 (pola 1,2,3,4,5,9,12) lub 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 2×3, 4×2 i 3×4 (pola 1,2,3,4,6,8,12).

Podanie przykładów dla wszystkich n należy traktować jako połowę zadania, a uzasadnienie, że innych n nie ma jako – drugą połowę.

10. Niech $ABCD$ będzie rozważanym czworokątem, P – wspomnianym punktem wewnętrznym oraz niech A' będzie środkiem boku AB, B' – środkiem boku BC, C' – środkiem boku CD, D' – środkiem boku DA, przy czym $A'P = A'B = x$, $BB' = B'P = y$. Oznacza to, że $A'BB'P$ jest deltoidem (ma dwie pary sąsiednich boków o równej długości), zatem taka jest każda z czterech części. Jeżeli $x = y$, to małe czworokąty są przystającymi rombami i łatwo wywnioskować, że $ABCD$ także jest rombem. Każdy deltoid ma parę równych przeciwległych kątów. Załóżmy, że $y \neq x$, wtedy kąty w drugiej parze nie są równe. Nietrudno wywnioskować z podobieństwa czworokątów, że w każdym z mniejszych czworokątów jeden z pary równych kątów jest także kątem czworokąta $ABCD$. Wynika stąd, że czworokąt ten ma wszystkie kąty równe (i są one proste), zatem jest prostokątem. Ponadto odcinki wychodzące z punktu P zawierają się w dwóch prostych wzajemnie prostopadłych. Ponieważ proste te przechodzą przez środki boków, to małe prostokąty także są prostokątami. Deltoid jest prostokątem tylko wtedy, gdy jest kwadratem.