

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: ponadpodstawowy

PÓŁFINAŁ

1. Znajdź NWD( $3^{2^{2022}} - 1, 3^{2^{2024}} + 1$ ).
2. Ile cyfr w zapisie dziesiętnym ma liczba cyfr liczby  $2022^{2022}$  w zapisie dziesiętnym?
3. Ile rozwiązań całkowitych ma równanie  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}$ ?
4. Pokaż, że prosta  $y = -x$  jest osią symetrii wykresu funkcji  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$  dokładnie wtedy, gdy  $f(-f(x)) = -x$  dla wszystkich  $x \in D$ .
5. Oznaczmy  $a_k = \frac{3k^2 - 2k - 1}{3k^2 + k - 2}$ . Sprawdź, czy  $2022 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2022}$  jest większe niż  $3/2$ .
6. Pokaż, że suma długości środkowych trójkąta jest większa od 75% obwodu.
7. Na przyjęciu spotkało się 20 osób. Każda z osób miała wśród pozostałych co najwyżej 3 takie osoby, z którymi się nie lubi (zakładamy, że jeśli A nie lubi B, to również B nie lubi A). Czy można te osoby posadzić przy dwóch dwudziestoosobowych stołach tak, aby każda z nich siedziała przy stole z co najwyżej jedną osobą, której nie lubi?
8. W prostokącie  $P$  o bokach 16 i 17 umieszczono 60 kwadratów jednostkowych. Czy (niezależnie od rozmieszczenia kwadratów) można w prostokącie  $P$  umieścić dodatkowo koło o średnicy 1 rozłączne ze wszystkimi kwadratami?
9. Określ, iloma zerami kończy się dziesiętny zapis liczby  $2023! + 2024! + 2025!$ .
10. Na ile maksymalnie części można podzielić przestrzeń czterema płaszczyznami?