POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: ponadpodstawowy

PÓŁFINAŁ

1. Znajdź $\mathrm{NWD}\left(3^{2^{2022}}-1, 3^{2^{2024}}+1\right)$.
2. Ile cyfr w zapisie dziesiętnym ma liczba cyfr liczby 2022^{2022} w zapisie dziesiętnym?
3. Ile rozwiązań całkowitych ma równanie $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}$?
4. Pokaż, że prosta $y=-x$ jest osią symetrii wykresu funkcji $f : D \to \mathbf{R}$ dokładnie wtedy, gdy $f(-f(x))=-x$ dla wszystkich $x \in D$.
5. Oznaczmy $a_k = \frac{3k^2-2k-1}{3k^2+k-2}$. Sprawdź, czy $2022 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2022}$ jest większe niż $3/2$.
6. Pokaż, że suma długości środkowych trójkąta jest większa od 75% obwodu.
7. Na przyjęciu spotkało się 20 osób. Każda z osób miała wśród pozostałych co najwyżej 3 takie osoby, z którymi się nie lubi (zakładamy, że jeśli A nie lubi B, to również B nie lubi A). Czy można te osoby posadzić przy dwóch dwudziestoosobowych stołach tak, aby każda z nich siedziała przy stole z co najwyżej jedną osobą, której nie lubi?
8. W prostokącie P o bokach 16 i 17 umieszczono 60 kwadratów jednostkowych. Czy (niezależnie od rozmieszczenia kwadratów) można w prostokącie P umieścić dodatkowo koło o średnicy 1 rozłączne ze wszystkimi kwadratami?
9. Określ, iloma zerami kończy się dziesiętny zapis liczby $2023! + 2024! + 2025!$.
10. Na ile maksymalnie części można podzielić przestrzeń czterema płaszczyznami?

PMM – rok szkolny 2021/2022 – poziom: PONADPODSTAWOWY

RUNDA ELIMINACYJNA – PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Dla liczby naturalnej n mamy $3^{2^{n+2}}+1 = (3^{2^n}-1)(3^{2^n}+1)(3^{2^{n+1}}+1)+2$. Podstawiając $n=2022$, wnioskujemy, że szukaną liczbą jest 1 lub 2. Ponieważ rozważane liczby są parzyste, to odpowiedzią jest 2.

2. Ponieważ $10^3 < 2022 < 10^4$, to $10^{6066} < 2022^{2022} < 10^{8088}$. Zatem ilość cyfr w zapisie dziesiętnym rozważanej liczby jest liczbą (w zapisie dziesiętnym) pomiędzy 6067 i 8088, więc ma cztery cyfry.

3. Rozważane równanie można równoważnie zapisać w postaci $xy-7x-7y=0,\ xy\neq 0$. Oznacza to, że $(x-7)(y-7)=49$. Czynniki po lewej stronie równania są tego samego znaku, a ponadto możemy stwierdzić, że albo jeden czynnik ma wartość bezwzględną 1, a drugi 49, albo wartości bezwzględne obu czynników wynoszą 7. Otrzymujemy stąd rozwiązania $(8,56)$, $(6,-42)$, $(56,8)$, $(-42,6)$, $(14,14)$, $(0,0)$. Ostatnie rozwiązanie nie spełnia wszystkich warunków. Rozważane równanie posiada pięć rozwiązań.

4. Rozważmy funkcję $g: D\to \mathbf{R}$ określoną wzorem $g(x)=-f(x)$. Wystarczy pokazać, że prosta $y=x$ jest osią symetrii wykresu funkcji g dokładnie wtedy, gdy $g(g(x))=x$ dla wszystkich $x\in D$. Równość $g(g(x))=x$ oznacza, że dziedzina i zbiór wartości funkcji g są sobie równe oraz funkcja ta jest do siebie funkcją odwrotną, jeśli zamienimy jej przeciwdziedzinę na D. To z kolei jest równoważne symetryczności jej wykresu względem prostej $y=x$, bo wykres funkcji i funkcji do niej odwrotnej są do siebie symetryczne względem tej prostej.

5. Nie. Ponieważ $a_k=\frac{(k-1)(3k+1)}{(k+1)(3k-2)}$, to $2022\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_{2022}$ wynosi

$$2022\cdot\frac{(2-1)(3-1)\cdot\ldots\cdot(2022-1)\cdot(6+1)(9+1)\cdot\ldots\cdot(6066+1)}{(2+1)(3+1)\cdot\ldots\cdot(2022+1)\cdot(6-2)(9-2)\cdot\ldots\cdot(6066-2)}=$$

$$=2022\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 6067}{2022\cdot 2023\cdot 4}=\frac{6067}{4046}<\frac{6069}{4046}=\frac{3}{2}.$$

6. Niech AA', BB', CC' będą środkowymi trójkąta ABC, a S – punktem ich przecięcia. Oczywiście $AB<AS+SB$, zatem $AB<\frac{2}{3}(AA'+BB')$. Dodając stronami tę nierówność i dwie analogiczne, otrzymujemy $AB+BC+CA<\frac{4}{3}(AA'+BB'+CC')$, co daje tezę.

7. Można. Na początku posadźmy osoby losowo i obliczmy sumę $S=s_1+s_2+s_3+\ldots+s_{19}+s_{20}$, gdzie wskaźnik s_i oznacza liczbę osób nielubianych przez osobę i, które siedzą razem z nią przy tym samym stole (oczywiście $S\leqslant 20\cdot 3=60$). Jeśli każde s_i jest co najwyżej 1, to mamy szukane rozwiązanie. Jeśli nie, to wybieramy dowolne i takie, że $s_i>1$. Ponieważ z osobą i przy stole znajdują się co najmniej dwie nielubiane przez nią osoby, to przy drugim stole co najwyżej jedna taka osoba. Przesadzając osobę i do drugiego stołu, zmniejszamy s_i co najmniej o 1, ale także zmniejszamy o 1 wskaźniki nielubianych przez nią osób siedzących przy pierwszym stole i zwiększamy o 1 wskaźnik osoby nielubianej przez osobę i (jeśli taka jest) siedzącej przy drugim stole. Oznacza to, że w wyniku tego przesadzenia liczba S zmalała co najmniej o 2, ponieważ wskaźniki pozostałych osób nie uległy zmianie. Takie przesadzania możemy kontynuować. Ponieważ liczba S maleje po każdym przesadzeniu, to po skończenie wielu krokach (co najwyżej 30) otrzymamy usadzenie spełniające warunki zadania, ponieważ liczba S nie może być ujemna.

8. Tak. Dla każdego kwadratu jednostkowego K oznaczmy przez K^+ zbiór wszystkich punktów odległych od K o co najwyżej $\frac{1}{2}$. Odpowiednie pocięcie tego zbioru pokazuje, że jego pole to suma pól trzech kwadratów jednostkowych i jednego koła o średnicy 1, zatem wynosi $3+\frac{\pi}{4}$. Koło o średnicy 1 jest rozłączne z K, jeżeli jego środek nie należy do K^+. Ponadto takie koło

jest zawarte w rozważanym prostokącie P, jeśli jego środek należy do prostokąta P_0 o bokach 15 i 16 i środku wspólnym z P. Pole P_0 jest równe 240, natomiast suma pól sześćdziesięciu figur K^+ wynosi co najwyżej $60(3 + \frac{\pi}{4}) < 240$, zatem figurami tymi nie można pokryć całego P_0. Dowolny niepokryty punkt jest środkiem szukanego koła.

9. Ilość końcowych zer w zapisie liczby jest mniejszą z liczby dwójek i liczby piątek w rozkładzie na czynniki pierwsze. Zauważmy, że $2023! + 2024! + 2025! = 2023! \cdot 2025^2 = 2023! \cdot 5^4 \cdot 3^8$. Wśród liczb $1, 2, \ldots, 2023$ jest 404 liczb podzielnych przez 5, 80 liczb podzielnych przez 25, 16 liczb podzielnych przez 125 oraz 3 liczby podzielne przez 625. Oznacza to, że w rozkładzie rozważanej liczby na czynniki występuje $404 + 80 + 16 + 3 + 4 = 507$ piątek. Dwójek jest więcej, gdyż 2023! ma ponad tysiąc czynników parzystych. Pokazaliśmy, że zapis rozważanej liczby kończy się dokładnie 507 zerami.

10. Przecięcie dowolnego podziału płaszczyzną może maksymalnie podwoić liczbę części, zatem trzy płaszczyzny mogą podzielić przestrzeń na co najwyżej osiem części. Taki podział otrzymamy, jeżeli trzy płaszczyzny mają dokładnie jeden punkt wspólny P. Czwarta płaszczyzna podwoi liczbę uzyskanych części, jeśli przejdzie przez wnętrze każdej z ośmiu części. Można zauważyć, że nie jest to możliwe. Mamy trzy proste L_1, L_2, L_3 będące częściami wspólnymi dwóch z trzech płaszczyzn i proste te podzielone są punktem P na sześć półprostych. Jakkolwiek poprowadzimy czwartą płaszczyznę, to musiałaby ona przeciąć każdą z tych sześciu półprostych poza punktem P, a to jest niemożliwe (bo każdą z tych trzech prostych musiałaby przeciąć w przynajmniej dwóch punktach). Zatem cztery płaszczyzny mogą podzielić przestrzeń na co najwyżej 15 części. Liczba tylu części jest osiągana, jeżeli cztery płaszczyzny nie mają punktu wspólnego i żadne dwie nie są równoległe.