

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: SP JUNIORZY

ĆWIERĆFINAŁ

1. Ile jest czynników w rozkładzie liczby 2022^{2022} na czynniki pierwsze?
2. Jacek bawił się czterema monetami i ważył je po trzy. Zapisał następujące wyniki ważeń: 29g, 28g, 26g, 25g. Ile ważyła każda z monet?
3. Oblicz sumę cyfr liczby $10^{2022} - 2023$.
4. W równoległoboku $ABCD$ punkt P jest środkiem boku AD , a punkt Q dzieli bok CD tak, że $|DC| = 3 \cdot |DQ|$. Wiemy, że pole tego równoległoboku wynosi 12 cm^2 . Oblicz pole trójkąta PQB .
5. Antek ma trzy liczby, których średnia wynosi 2022. Adam i Jacek mają po dwie liczby. Średnia liczb Antka i Adama wynosi 2019, zaś średnia liczb Antka i Jacka wynosi 2025. Ile wynosi średnia liczb Jacka i Adama?
6. Długości krawędzi prostopadłościanu o objętości 728 są liczbami całkowitymi, a suma ich długości wynosi 124. Jakie są długości krawędzi?
7. Trapez $ABCD$ o podstawie $|AB| = 23$ jest równoramienny. Ponadto $|BC| = |CD| = 13$. Punkt D jest środkiem odcinka AE . Oblicz długość odcinka CE .
8. Basia i Kasia spacerują wokół boiska po bieżni długości 600 m. Wystartowały z tego samego miejsca, ale w przeciwnych kierunkach. Gdy minęło 6 minut, spotkały się po raz pierwszy i wówczas Basia postanowiła iść dwa razy wolniej. Po drugim spotkaniu, które nastąpiło po kolejnych 10 minutach, Kasia zdecydowała się iść dwa razy szybciej. Po ilu minutach dojdzie do następnego spotkania?
9. Na ile sposobów można wybrać 3 wierzchołki sześcianu, aby były one wierzchołkami trójkąta prostokątnego?
10. Z litrowej butelki 10% roztworu soli wiano do szklanki 200 ml i odparowano wodę ze szklanki tak, że objętość roztworu zmalała o połowę, a następnie ubytek uzupełniono 10% roztworem soli z butelki. Jakie jest stężenie roztworu w szklance?

PMM – rok szkolny 2021/2022 – poziom: SP JUNIORZY
RUNDA ELIMINACYJNA – ĆWIERĆFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Ponieważ $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ i czynniki te są liczbami pierwszymi, to w rozkładzie rozważanej liczby każdy z nich wystąpi 2022 razy i wszystkich czynników pierwszych będzie 6066.
2. Suma wszystkich wyników ważeń to trzykrotność sumy wag wszystkich monet. Wynika stąd, że monety ważyły 36g. Odejmując od tego wyniki ważeń otrzymamy wagi monet: 7g, 8g, 10g, 11g.
3. Liczba ta wynosi $99 \dots 97977$, a w zapisie występuje 2022 cyfr. Zatem szukana suma to $3 \cdot 7 + 2019 \cdot 9 = 18192$.
4. Niech $|AB| = |CD| = 3a$. Oznaczając przez h wysokość równoległoboku $ABCD$ poprowadzoną na bok AB , dostajemy związek: $3a \cdot h = 12$, który daje $a \cdot h = 4$. Mamy stąd, że pole trójkąta ABP wynosi $\frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{1}{2}h = \frac{3}{4}ah = 3 \text{ cm}^2$, pole trójkąta BCQ to $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h = 4 \text{ cm}^2$, a trójkąta DPQ wynosi $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{4}ah = 1 \text{ cm}^2$. Ponieważ pole trójkąta PQB to pole równoległoboku pomniejszone o sumę pól wymienionych trójkątów, to wynosi ono 4 cm^2 .
5. Suma liczb Antka wynosi $3 \cdot 2022$, suma liczb Antka i Adama to $5 \cdot 2019$, zatem suma liczb Adama wynosi 4029. Analogicznie obliczamy, że 4059 to suma liczb Jacka. Teraz łatwo obliczyć odpowiedź, którą jest 2022.
6. Ponieważ $728 = 7 \cdot 8 \cdot 13$ i suma długości krawędzi o wspólnym końcu wynosi 31, to długości te wynoszą 4, 13, 14.
7. Niech D' , E' będą takimi punktami odcinka AB , że proste DD' i EE' są prostopadłe do prostej AB . Oznaczmy przez E'' punkt przecięcia prostych EE' i DC . Nietrudno uzasadnić, że trójkąty ADD' i DEE'' są przystające (z cechy KBK), a więc $AD' = 5$. Mamy stąd $|EE''| = |DD'| = 12$, $|CE''| = 13 - 5 = 8$, zatem $|EC|^2 = 12^2 + 8^2 = 208$, skąd $|EC| = 4\sqrt{13}$.
8. Zauważmy, że pomiędzy dowolnymi kolejnymi spotkaniami koleżanki przebiegły w sumie całe okrążenie, czyli 600 m. Czas będziemy liczyli w minutach, drogę w metrach. Suma początkowych prędkości koleżanek wyniosła $\frac{600}{6} = 100$. Suma prędkości po pierwszym spotkaniu to $\frac{600}{10} = 60$ i była mniejsza o połowę początkowej prędkości Basi, zatem prędkości Basi wyniosła $v = 2(100 - 60) = 80$. Prędkość początkowa Kasi to $100 - v = 20$, zatem sumaryczna prędkość koleżanek po drugim spotkaniu to $40 + 40 = 80$. Widoczne jest teraz, że odpowiedzią jest 7,5 min.
9. Wierzchołek, przy którym trójkąt ma kąt prosty, możemy wybrać na 8 sposobów. Przyprostokątnymi mogą być wyłącznie dwie krawędzie (trzy możliwości) albo jedna krawędź (trzy możliwości) i przekątna ściany prostopadłej do tej krawędzi. Oznacza to, że jest $8 \cdot 6 = 48$ sposobów.
10. Po pierwszym wleaniu pozostało $\frac{1}{10}$ szklanki soli. Drugie wlewanie dostarczyło $\frac{1}{10}$ połowy szklanki soli, czyli $\frac{1}{20}$ szklanki soli. Zatem w szklance znajduje się $\frac{3}{20}$ soli, czyli stężenie roztworu wynosi 15%.
II sposób. Po odparowaniu pozostał 20% roztwór. Ponieważ dolano tyle samo roztworu, to wypadkowe stężenie jest średnią arytmetyczną stężeń składowych, co daje 15%.