POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. Znajdź liczbę trzycyfrową, która jest sześcianem połowy sumy swoich cyfr.

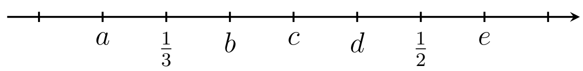
2. Wiadomo, że $15^{21} = 49878850951\square 9476318359375$, gdzie w miejscu kwadracika brakuje jednej cyfry. Jakiej cyfry brakuje?

3. Zegar elektroniczny wyświetla czas w formacie 24 godzinnym $AB : CD$ (tzn. godziny i minuty). Przez jaką część doby widoczna jest na wyświetlaczu przynajmniej jedna cyfra 2?

4. Czy wśród 21 różnych liczb całkowitych dodatnich o sumie równej 232 może wystąpić liczba 21?

5. W trójkącie równoramiennym o obwodzie 48 cm każde z ramion ma długość 15 cm. Oblicz sumę długości wszystkich wysokości tego trójkąta.

6. Podaj współrzędne a, b, c, d, e punktów na osi liczbowej (odległości między sąsiednimi punktami zaznaczonymi na osi liczbowej są takie same)



7. W ostrokątnym trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$ na boku BC wybrano punkt D w taki sposób, że $|AB| = |BD|$. Jakie miary kątów ma trójkąt ABC, jeśli wiadomo, że trójkąt ADC jest równoramienny?

8. Czy można liczby od 1 do 50 połączyć w pary w ten sposób, by sumy liczb w parach były różnymi liczbami pierwszymi?

9. Adaś i Basia grają w grę, w której zwycięzca otrzymuje x punktów, a przegrany y punktów (gdzie $x > y$ i są one całkowite). Nie ma remisów. Po kilku rozgrywkach Basia ma 30 punktów, a Adaś 25, gdyż wygrał tylko dwukrotnie. Ile punktów otrzymywał zwycięzca?

10. Krany A, B i C otwarte łącznie napełniają cały basen w czasie o 6 godzin krótszym niż kran A samodzielnie i o 1 godzinę krótszym niż kran B samodzielnie oraz w czasie o połowę krótszym niż kran C samodzielnie. Krany A i B bez kranu C napełnią basen w 80 minut. Ile minut każdy z kranów samodzielnie napełnia basen?

PMM – rok szkolny 2021/2022 – poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Taką liczbą jest wyłącznie 729. Można to łatwo zweryfikować sprawdzając wszystkie pięć trzycyfrowych sześcianów.

2. Liczba $15^{21} = 3^{21} \cdot 5^{21}$ dzieli się przez 9. Aby suma cyfr tej liczby dzieliła się przez 9 trzeba wstawić 1 i faktycznie $15^{21} = 4987885095119476318359375$. Za rozwiązanie żmudnie obliczające potęgę bez użycia cechy podzielności odejmujemy dwa punkty.

3. Pełne godziny: $02, 12, 20, 21, 22, 23$, czyli 6 godzin lub $\frac{1}{4}$ doby plus osiemnaście razy pełne minuty: $02, 12, 2x, 32, 42, 52$, czyli dokładnie $\frac{1}{4}$ z każdej z pozostałych 18 godzin. Łącznie to daje 630 minut, czyli $10,5$ godziny albo $\frac{7}{16}$ doby.

4. Nie może. Ponieważ $1+2+\ldots+20+21 = 231$, to jedynym zbiorem parami różnych liczb o sumie równej 232 jest $\{1, 2, \ldots 19, 20, 22\}$.

5. Podstawa trójkąta ma długość $48 - 2 \cdot 15 = 18$ cm. Z twierdzenia Pitagorasa liczymy długość wysokości opuszczonej na podstawę $h = 12$ cm. Pole trójkąta wynosi więc $\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 12 = 108$ cm^2. Długość wysokości x opuszczonej na ramię trójkąta możemy policzyć z równania $108 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot x = 108$. Długość tej wysokości to $x = \frac{72}{5}$ cm.

6. Zauważamy, że jeden mały odcinek (taki jak między b i c), to ćwiartka odległości między $\dfrac{1}{3}$ a $\dfrac{1}{2}$. Ma zatem długość $\dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{24}$. Dalej już „z górki” $a = \dfrac{7}{24}$, $b = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8}$, $c = \dfrac{10}{24} = \dfrac{5}{12}$, $d = \dfrac{11}{24}$, $e = \dfrac{13}{24}$.

7. Oznaczmy $\measuredangle CAB = \measuredangle CBA = \alpha$ zaś $\measuredangle ACB = \beta$. Oczywiście $2\alpha + \beta = 180^\circ$. Ponieważ trójkąt ABD jest równoramienny, to $180^\circ - 2\beta = \measuredangle ADC = 180^\circ - \measuredangle ADB = 180^\circ - (90^\circ - \alpha/2)$. Oczywiście kąt $\measuredangle ADC$ jest rozwarty, więc musi być $\measuredangle DAC = \measuredangle DCA = \beta$ (ponieważ trójkąt ADC jest równoramienny).

   Ponieważ $90^\circ - \alpha/2 = 2\beta$, to $180^\circ = 4\beta + \alpha$. W połączeniu z warunkiem $2\alpha + \beta = 180^\circ$ daje to $\alpha = 3\beta$ i ostatecznie $7\beta = 180^\circ$ czyli trójkąt o kątach $\frac{3}{7} \cdot 180^\circ, \frac{3}{7} \cdot 180^\circ, \frac{1}{7} \cdot 180^\circ$.

8. Nie można. Najmniejszą sumą, jaką możemy uzyskać jest $1+2 = 3$, a największą $49+50 = 99$. Mamy tylko 24 liczby pierwsze pomiędzy tymi liczbami:

   $$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

9. 8 punktów za wygraną, a 3 za przegraną. Można rozumować tak. W każdej z n rund przyznano $(x + y)$ punktów, więc łącznie $n(x + y) = 55 = 5 \cdot 11$. Odbyła się więcej niż jedna runda, a $x + y > 1$, bo $x > y$, a więc mamy dwie możliwości: było 5 rund lub 11 rund. Druga opcja jednak odpada, gdyż Basia ma tylko o 5 punktów więcej od Adasia, a gdyby wygrała aż 9 rund, to miałaby przynajmniej o 7 punktów więcej. Było zatem 5 rund, trzy wygrała Basia, a to oznacza, że x jest o 5 większe niż y.

10. Kran C napełni połowę basenu w takim samym czasie, jak robią to krany A i B łącznie, czyli w 40 minut. W tym właśnie czasie wszystkie trzy krany napełnią cały basen. Zatem kran A samodzielnie napełni w $40+6\cdot 60 = 400$ minut, a kran B napełni basen w $40+60 = 100$ minut.