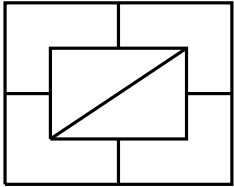


POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

- Przez jaką liczbę naturalną należy podzielić liczbę 145, aby otrzymać resztę 12? Znajdź wszystkie takie liczby.
- Ile jest liczb czterocyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi 18?
- Pani Ania sprawdza klasówkę uczniów z klasy VIIIA, liczącej 30 uczniów. Widzi, że choć wszyscy rozwiązali zadanie pierwsze, to i tak jedna trzecia piszących dostanie ocenę niedostateczną lub dopuszczającą. Za to aż 25% piszących dziewcząt dostanie ocenę bardzo dobrą (a klasówkę pisało tyle samo dziewcząt co chłopców). Ilu uczniów pisało klasówkę?
- Czterech chłopców grało w piłkę i jeden z nich stłukł szybę. Na pytanie, który z nich jest winny odpowiedzieli:
Arek: Marek jest niewinny.
Darek: To nie Arek.
Marek: To był Czarek.
Czarek: To Darek.
Skłamał tylko winny. Kto stłukł szybę?
- Uzasadnij, że dwusieczne dwóch sąsiednich kątów równoległoboku przecinają się pod kątem prostym. (*Przypominamy: Dwusieczna kąta to półprosta o początku w wierzchołku kąta i dzieląca ten kąt na dwa kąty przystające.*)
- Trójka malarzy przyjęła zlecenie na pomalowanie ścian w pewnym hotelu. Gdyby Adam pracował sam, wykonałby zlecenie w ciągu 12 dni, Jackowi zajęłoby to 15 dni, a najstarszemu Antkowi 20 dni. Początkowo malowali tylko Adam i Antek, a po trzech dniach dołączył do nich Jacek. Ile dni zajęło malarzom wykonanie zlecenia?
- Do 4 kg roztworu cukru dolano 0,5 litra wody i wówczas stężenie procentowe roztworu zmniejszyło się o 1 punkt procentowy. Jakie jest stężenie procentowe otrzymanego roztworu?
- Figura przedstawiona na rysunku obok składa się z 6 obszarów. Każdy obszar należy pokolorować jednym kolorem. Ile co najmniej kolorów należy użyć, aby stykające się obszary miały różne kolory?
- Czarek i Jacek mają razem 56 lat. Czarek ma dwa razy więcej lat niż Jacek miał wtedy, gdy Czarek miał tyle lat co teraz Jacek. Ile lat ma Czarek, a ile Jacek?
- W trójkącie prostokątnym ABC wysokość CD dzieli przeciwprostokątną AB na dwie części o długościach 9 cm i 16 cm. Oblicz pole trójkąta ABC .

PMM – rok szkolny 2021/2022 – poziom: SP JUNIORZY
RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Ponieważ $145 - 12 = 7 \cdot 19$, to są dwie liczby naturalne spełniające warunki zadania: 19 oraz 133. Podanie tylko jednej z nich nie może być uznane za rozwiązanie zadania.
2. Ponieważ $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, to rozważane liczby zbudowane są z cyfr 1, 2, 3, 3 lub 1, 1, 2, 9 lub 1, 1, 3, 6. Dwie trójki można umieścić na czterech miejscach na $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ sposobów. Dla każdego rozmieszczenia trójek na pozostałych miejscach jedynekę i dwójkę można rozmieścić na dwa sposoby. Zatem rozważanych liczb czterocyfrowych zbudowanych z pierwszego zestawu cyfr jest $6 \cdot 2 = 12$. Łatwo zauważyć, że z każdego z pozostałych zestawów cyfr także można ułożyć 12 liczb. Szukanych liczb jest 36.
3. Liczba piszących jest podzielna przez 3. Ponieważ $25\% = \frac{1}{4}$, to liczba piszących dziewcząt dzieli się przez 4, zatem liczba wszystkich piszących jest podzielna przez 8. Oznacza to, że klasówkę pisało $3 \cdot 8 = 24$ uczniów.
4. Gdyby Darek skłamał (czyli był winny), to Arek byłby winny także, co przeczy założeniom. Zatem Darek powiedział prawdę, więc Arek był niewinny, czyli też powiedział prawdę. Stąd wniosek, że Marek też powiedział prawdę, czyli winnym był Czarek i kłamał, co jest zgodne z wcześniejszymi ustaleniami.
5. Suma miar dwóch sąsiednich kątów równoległoboku wynosi 180° , więc suma miar połówek tych kątów jest równa 90° . Rozważmy trójkąt utworzony przez bok równoległoboku i dwusieczne kątów do niego przylegających. Powyższe rozważania pokazują, że suma miar dwóch kątów tego trójkąta wynosi 90° , zatem trzeci kąt (ten między dwusiecznymi) jest prosty.
6. W ciągu jednego dnia Adam wykonywał $\frac{1}{12}$ zlecenia, Jacek $\frac{1}{15}$, a Antek $\frac{1}{20}$. Zatem Adam z Antkiem wykonują dziennie $\frac{2}{15}$ całej pracy, a cała trójka piątą jej część. Ponieważ Adam i Antek przez pierwsze trzy dni wykonali $3 \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{5}$ zlecenia, to po dołączeniu Jacka praca została ukończona przez następne trzy dni. Zlecenie zostało wykonane w ciągu sześciu dni.
7. Jeżeli zmniejszymy w końcowym roztworze ilość wody i ilość cukru o jedną dziewiątą, to stężenie roztworu nie zmieni się, a jego ciężar wyniesie 4 kg. Wynika z tego, że zmniejszając stężenie roztworu 4-kilogramowego o jedną dziewiątą, równocześnie zmniejszamy to stężenie o 1 procent. Teraz jest jasne, że początkowy roztwór miał stężenie 9%, a końcowy 8%.
Inny sposób. Jeżeli $x\%$ jest stężeniem cukru w końcowym roztworze, to porównując ilość cukru na początku i na końcu otrzymujemy $\frac{x+1}{100} \cdot 4 = \frac{x}{100} \cdot 4,5$. Mamy stąd $x = 8$, czyli stężenie otrzymanego roztworu to 8%.
8. Potrzebna i wystarczająca jest liczba trzech kolorów. Środkowe trójkąty i obszar w lewym dolnym rogu muszą być różnych kolorów, zatem dwa kolory nie wystarczą. Pokażemy, że trzy kolory są wystarczające. Należy pomalować dolny trójkąt i obszar w lewym górnym rogu jednym kolorem, obszary symetryczne do nich drugim kolorem, a pozostałe obszary trzecim kolorem.
9. Mowa jest o dwóch momentach czasowych, które nazwiemy "teraz" i "wtedy". Z treści zadania wynika, że Czarek "teraz", to dwa razy tyle co Jacek "wtedy". Ale różnica między "teraz" i "wtedy" dla każdego z nich jest taka sama. Stąd wniosek, że Jacek jest o jedną czwartą młodszy od Czarka. Teraz łatwo ustalić, że Jacek ma 24 lata, a Czarek 32 lata.
10. Wysokość CD dzieli trójkąt na dwa do niego podobne, co łatwo stwierdzić rozważając kąty. Z tego podobieństwa otrzymujemy $\frac{CD}{9} = \frac{16}{CD}$, skąd $CD = 12$ cm. Pole trójkąta wynosi $\frac{1}{2} \cdot (9 + 16) \cdot 12 = 150$ cm².