POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ IV

1. Adam przewiązał się gumą w pasie, a drugim jej końcem przewiązał Jacka, od którego odszedł trzy kroki. Guma była napięta. Adam przeszedł dwa kroki w kierunku prostopadłym do gumki. następnie zrobił jeden krok w kierunku prostopadłym do nowego położenia gumki. Ostatnią czynność powtórzył jeszcze dwa razy. W jakiej odległości od Jacka znalazł się Adam?

2. Ojciec z synem, pracując razem, potrzebowaliby na pomalowanie płotu 4 godziny. Sam ojciec pomalowałby płot w 6 godzin. Ostatecznie płot malował sam syn. Zaczął o 7 rano, ale w międzyczasie zrobił sobie dwie godzinne przerwy na przejście kolejnego poziomu w grze. O której godzinie skończył malowanie płotu?

3. Przedsiębiorstwo SŁODZIK wytwarza napój malinowy z gotowego koncentratu w taki sposób, że napoju wychodzi o 800% więcej niż użytego koncentratu. Ile litrów koncentratu potrzebuje SŁODZIK, aby wyprodukować 7200 litrów napoju malinowego?

4. Jacek ułożył siedem różnych cukierków w wierzchołkach siedmiokąta foremnego. Postanowił, że będzie zjadał co trzeci w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Od którego cukierka powinien zacząć, aby na końcu zjeść ulubioną śliwkę w czekoladzie?

5. Z Nisko do Wysoko prowadzi tylko jedna trasa. Dziś o 8.00 Jacek wyruszył do Nisko i dotarł do Wysoko o 10.30, zaś Adam wyruszyło 8.15 z Wysoko i dotarł do Nisko o 10.15. Na trasie minęli się dokładnie przy znaku z napisem ”Nisko 5 km”. Zakładając, że każdy z nich utrzymywał takie samo tempo marszu przez cały czas, wylicz ile kilometrów ma trasa z Nisko do Wysoko.

6. Na łące są kaczki i króliczki. W sumie jest tam 26 główek i 64 nóżki. Ile jest kaczek, a ile króliczków?

7. W trójkącie ABC kąt ABC jest prosty, $AB = 3,\ BC = 4$, BD jest wysokością trójkąta, a E środkiem odcinka DC. Jaka jest długość odcinka BE?

8. Do ponumerowania stron książki *”Krótka opowieść o tym, dlaczego trójkąt ma tylko trzy boki”* użyto 3829 cyfr. Ile stron ma ta książka?

9. W sześciokącie $ABCDEF$ wszystkie kąty przy wierzchołkach mają taką samą miarę. Pokaż, że dwusieczne kątów przy wierzchołkach A i D są równoległe.

10. Określ, czy wynik działania

$$1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5)+\ldots+(1+2+3+4+5+\ldots+2022)$$

jest liczbą parzystą, czy nieparzystą.

PMM – rok szkolny 2021/2022 – poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ IV – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy, że długość gumki w kolejnych etapach wynosiła $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{16} = 4$. Odpowiedź to cztery kroki.

2. Ojciec z synem w ciągu jednej godziny malują jedną czwartą płotu, a ojciec sam jedną szóstą, zatem syn samodzielnie pomaluje jedną dwunastą płotu w ciągu godziny. Oznacza to, że syn potrzebuje dwunastu godzin na pomalowanie całości, zatem skończył malowanie, po doliczeniu przerw, o dziewiątej wieczorem.

3. Z jednego litra koncentratu produkuje się 9 litrów napoju, zatem do produkcji 7200 litrów napoju potrzeba dziewięć razy mniej koncentratu, czyli 800 litrów.

4. Ponumerujmy cukierki zgodnie z kolejnością ich zjadania przez Jacka, oczywiście śliwka w czekoladzie dostaje numer 7. Będziemy mówić, że x jest między y i z, jeżeli przemieszczając się po wierzchołkach siedmiokąta zgodnie z ruchem wskazówek zegara odwiedzamy je w kolejności $y,\ x,\ z$. Rozwiążmy to zadanie "od tyłu", to znaczy obejrzyjmy film o zjadaniu cukierków w przeciwną stronę od sytuacji, gdy zostały tylko cukierki z z numerami 7 i 6. Łatwo ustalić, że 5 musi być między 7 i 6. Dalej 4 między 5 i 6, 3 między 6 i 7, 2 między 5 i 4, 1 między 3 i 7. Wynika stąd, że Jacek powinien zacząć od cukierka leżącego najbliżej śliwki w czekoladzie licząc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

   Inne rozwiązanie: Ponumerujmy wierzchołki siedmiokąta kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 7 zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Przypuśćmy, że Jacek zacznie od zjedzenia cukierka położonego w wierzchołku o numerze 1. Wówczas kolejno zje cukierki umieszczone w wierzchołkach: 4, 7, 5, 3, 6 i na końcu 2 (i tam powinna znajdować się śliwka w czekoladzie). Wynika stąd, że Jacek powinien zacząć od cukierka leżącego najbliżej śliwki w czekoladzie licząc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

5. Niech x oznacza odległość w kilometrach między miastami. Do godziny 8.15 Jacek przeszedł jedną dziesiątą trasy. Stosunek odległości, jakie przeszli chłopcy od 8.15 do do momentu spotkania jest równy stosunkowi prędkości ich marszów, czyli stosunkowi czasów przejścia całej trasy. Mamy stąd $\frac{5-0{,}1x}{x-5} = \frac{2}{2{,}5}$, zatem $x = 10$.

6. Ponieważ par nóg jest o 32-26=6 więcej niż główek, to jest na łące sześć królików, zatem kaczek jest dwadzieścia.

7. Obliczając pole trójkąta na dwa sposoby otrzymamy $BD = \frac{12}{5}$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BDC mamy $DC = \frac{16}{5}$, zatem $DE = \frac{8}{5}$. Z twierdzenia Pitagorasa $BE^2 = BD^2 + DE^2 = \frac{16 \cdot 13}{25}$, zatem $BE = \frac{4}{5}\sqrt{13}$.

8. Do ponumerowania stron od 1 do 999 potrzeba $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2889$ cyfr, zatem pozostaje 940 cyfr na numerację czterocyfrową, co wystarczy na 235 stron. Książka ma 1234 strony.

9. Łatwo policzyć, że miary kątów przy wierzchołkach wynoszą $120°$. Niech l będzie dwusieczną kąta FAB, wtedy kąt między l i AB wynosi $60°$, a kąt między AB i BC wynosi $120°$, zatem proste l i BC są równoległe. Analogicznie dowodzimy równoległości dwusiecznej kąta CDE i prostej BC, a to daje tezę.

10. Zauważmy, że składników 1 jest 2022, składników 2 jest 2021, itd. Zwiększenie składnika o jeden zmniejsza ilość takich składników także o jeden. Stąd wniosek, że liczba składników nieparzystych jest parzysta, a parzystych nieparzysta. Jest teraz jasne, że rozważana suma jest parzysta.