POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: SP JUNIORZY

FINAŁ

1. Ile razy między początkiem i końcem doby kąt między wskazówkami zegara wynosił $30°$, jeżeli zegar spieszył się 4 minuty na godzinę, a na początku doby był spóźniony 15 minut?

2. W trapezie $ABCD$ punkt P jest środkiem podstawy AB, a punkt Q środkiem ramienia AD. Ponadto podstawa AB jest pięć razy dłuższa niż podstawa CD. Czy pole trójkąta PCQ jest większe od jednej trzeciej pola trapezu?

3. Znajdź takie liczby a, b, c, że $3a = 3 + a,\ 3ab = 3 + a + b,\ 3abc = 3 + a + b + c$.

4. Czy liczba $2022^2 + 2202^4$ jest podzielna przez 900?

5. Wewnętrzny punkt trójkąta ABC połączono z wierzchołkami otrzymując trzy trójkąty o takich samych kątach. Ponadto każdy z tych trójkątów ma bok o długości d, a kąt naprzeciw tego boku ma taką samą miarę w każdym trójkącie. Pokaż, że trójkąt ABC jest równoboczny.

6. Dany jest zbiór 22 różnych liczb naturalnych. Uzasadnij, że można z tego zbioru wybrać takie trzy liczby x, y, z, że liczba $(x - y)z$ jest podzielna przez 22.

7. Żółwie Adam i Jacek wyruszyli w poniedziałek 7 marca o godzinie 9 rano na urodziny żółwicy Basi. Codziennie wlekli się z jednostajną prędkością od godziny 9 rano do 3 po południu. Pozostały czas przeznaczali na jedzenie i odpoczynek. W poniedziałki Adam przechodził 10 żółwmil, we wtorki 9 żółwmil, w środy 8, we czwartki 7, w piątki 6 żółwmil. Dla Jacka te dystanse wynosiły odpowiednio 3, 5, 7, 9, 11 żółwmil. W weekendy żółwie nie wędrowały, gdyż rozmyślały nad żółwim losem. Żółwie wędrowały po tej samej drodze, ale Adam mieszkał 11 żółwmil dalej niż Jacek. Ile razy i w jakie dni żółwie spotkały się w czasie wędrówki trwającej ponad miesiąc?

8. Adam telefonicznie zaprosił do siebie Jacka, który wyruszył rowerem z prędkością 16 km/h zaraz po telefonie. W połowie drogi Jacek zorientował się, że wypadły mu klucze. Aby ich nie przeoczyć, zawrócił i prowadził rower z prędkością 4 km/h. W połowie drogi przejechanej rowerem znalazł klucze. Ponieważ był już trochę zmęczony, pozostałą część drogi przejechał z prędkością 12 km/h. Jaką średnią prędkość wyliczył Jackowi Adam?

9. Wyjaśnij, czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda ściana boczna jest trójkątem prostokątnym.

10. W trójkącie ABC zaznaczono taki punkt S, że odcinek AS zawiera się w dwusiecznej kąta BAC oraz odcinek BS zawiera się w dwusiecznej kąta ABC. Przez punkt S poprowadzono prostą równoległą do boku AB. Prosta ta przecięła bok AC w punkcie M, zaś bok BC w punkcie N. Wiedząc, że $|AM| = 5$ cm i $|BN| = 4$ cm, oblicz długość odcinka MN.

PMM – rok szkolny 2021/2022 – poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – FINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Zegar na początku doby pokazywał 11.45, a na końcu doby 1.21. Rozważany układ wskazówek nazwiemy stanem T zegara. Będziemy też mówili o czasie pokazywanym przez zegar, nie czasie faktycznym. Między godziną 1.00 i 11.00 wskazówki zegara pokryły się 10 razy. Z każdym takim pokryciem związane są dwa stany T zegara: ok. 5 min. przed i ok. 5 min. po pokryciu. Między północą i południem są jeszcze dwa stany T zegara: ok. 5 min. po północy i ok. 5 min. przed południem. Wynika stąd, że między północą i południem zegar znalazł się w stanie T 22 razy. Także 22 razy wystąpił stan T między południem i północą. Daje to 44 stany T między kolejnymi północami. Jest ponadto jeden stan T przed pierwszą północą oraz trzy stany T po drugiej północy: ok. 0.05, o 1.00 i ok. 1.10. Reasumując, w rozważanym okresie czasu zegar był w stanie T dokładnie 48 razy.

2. Oznaczmy $b = |CD|$ i h jako wysokość trapezu. Wtedy $|AB| = 5b$, $|AP| = |PB| = \frac{5}{2}b$ oraz pole trapezu jest równe $3bh$. Suma pól trójkątów APQ, PBC, CDQ jest równa $\frac{5}{8}bh + \frac{5}{4}bh + \frac{1}{4}bh = \frac{17}{8}bh$. Zatem pole trójkąta PCQ to $3bh - \frac{17}{8}bh = \frac{7}{8}bh < \frac{1}{3} \cdot 3bh$. Odpowiedź brzmi: nie.

3. Rozwiązując poszczególne równania (po wstawieniu wyników z poprzednich równań) otrzymujemy kolejno: $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{9}{7}$ i $c = \frac{81}{67}$.

4. Oczywiście liczba ta jest podzielna przez 9. Pokażemy, że dzieli się również przez 100, czyli także przez 900. Wystarczy pokazać, że zapis tej liczby kończy się dwoma zerami. Zapis pierwszego składnika kończy się tak, jak 22^2, czyli na 84. Drugi składnik ma zakończenie takie, jak $2^4 = 16$. Ponieważ $84 + 16 = 100$, to rozważana liczba kończy się dwoma zerami, więc dzieli się przez 100.

5. Oznaczmy wymieniony punkt wewnętrzny trójkąta ABC przez P. Co najmniej dwa kąty o wierzchołku w P są rozwarte (i sobie równe). Przypuśćmy, że jeden z kątów o wierzchołku w P (np. kąt APB) nie jest rozwarty, zatem rozwartym jest inny kąt trójkąta APB, np. kąt PAB (zatem $\measuredangle PAB = \measuredangle APC$). Mamy $\measuredangle BPC = 360° - \measuredangle APC - \measuredangle APB = 360° - (\measuredangle PAB + \measuredangle APB) > 180°$, co jest niemożliwe. Zatem wszystkie kąty o wierzchołku w P są rozwarte, a wtedy muszą być miarę $120°$. Jeśli d jest naprzeciwko tych kątów, to oczywiście otrzymujemy tezę. Oznaczmy kąty ostre trójkątów przez α i β i załóżmy, że d jest naprzeciwko α. Jeżeli przy każdym wierzchołku trójkąta ABC „spotykają się” kąty α i β, to teza jest oczywista, bo $\alpha + \beta = 60°$. Pozostaje rozważyć przypadek, gdy dla jednego z wierzchołków trójkąta ABC (np. dla wierzchołka A) mamy $\measuredangle BAP = \measuredangle CAP = \alpha$. Wtedy jednak $|PB| = |PC| = d$, czyli $\alpha = \beta = 30°$, stąd teza.

6. Jeżeli w tym zbiorze jest liczba podzielna przez 22, wybieramy ją jako z i podane wyrażenie dzieli się przez 22. W przeciwnym wypadku wśród danych liczb są dwie dające taką samą resztę (różną od zera) przy dzieleniu przez 22. Wybieramy je jako x i y, wtedy $x - y$ jest podzielne przez 22.

7. Jest oczywistym, że każdego tygodnia Adam przebywał o 5 żółwmil więcej niż Jacek, zatem po trzech tygodniach wędrówki będzie wyprzedzał Jacka o 4 żółwmile i od tego czasu już nigdy nie da się Jackowi dogonić. Wystarczy zatem skrupulatnie przeanalizować pierwsze trzy tygodnie wędrówki. Zauważmy, że do pierwszego spotkania doszło we wtorek (8 marca) na koniec marszu o godz. 15, więc żółwie spędziły noc wspólnie i środową wędrówkę rozpoczęły z jednego miejsca. Na koniec dnia (zatem także na początku czwartku) Adam wyprzedzał Jacka o jedną żółwmilę. Na koniec czwartku to Jacek wyprzedzał Adama o jedną żółwmilę, zatem tego dnia, czyli 10 marca, też nastąpiło spotkanie. W piątek cały czas prowadził Jacek. Poniedziałek 14 marca zaczął się sześciożółwmilową przewagą Jacka. Jest jasne, że tego dnia doszło do następnego spotkania, bo na koniec dnia to Adam miał przewagę. Jednak na koniec piątku Jacek znowu prowadził jedną żółwmilą, zatem nastąpiło tego dnia (18 marca) spotkanie. Ostatnie spotkanie nastąpiło w poniedziałek 21 marca. Spotkań było 5 w terminach podanych wyżej.

8. Jeżeli liczoną w kilometrach długość drogi do Adama oznaczymy przez $4d$, to czas przejazdu liczony w godzinach wynosi $(\frac{2}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{12})d = \frac{5d}{8}$, czyli średnia prędkość wyliczona przez Adama to $4d : \frac{5d}{8} = 6,4$ km/h.

9. Istnieje. Rozważmy kwadrat $ABCD$ i punkt S taki, że odcinek AS jest wysokością ostrosłupa $ABCDS$. Wtedy kąty BAS, DAS, SBC i SDC są proste.

10. Kąty MSA i BAS są równe jako naprzeciwległe. Oczywiście kąty BAS i MAS także są równe, zatem trójkąt SAM jest równoramienny, czyli $|MS| = |AM|$. Analogicznie pokazuje się, że $|SN| = |BN|$, skąd $|MN| = |AM| + |BN| = 9$ cm.