POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: SP JUNIORZY

PÓŁFINAŁ

1. Mucha znajduje się w punkcie P na ścianie bocznej prawidłowego ostrosłupa o podstawie kwadratowej, którego wszystkie krawędzie mają długość 1. Punkt P leży na wysokości opuszczonej na krawędź podstawy ostrosłupa, a jego odległość od tej krawędzi wynosi trzecią część tej wysokości. Punkt K leży na przeciwległej ścianie bocznej w analogicznym miejscu jak punkt P. Mucha rozważa różne drogi dotarcia do punktu K po powierzchni bocznej ostrosłupa. Która z tych dróg jest najkrótsza?

2. Basia kupiła cukier i zrobiła z niego syrop o stężeniu 4%. Po pewnym czasie dokupiła dwa razy więcej cukru i dodała do syropu. Jakie stężenie syropu otrzymała Basia?

3. Na tacy leżą trzy kremówki z różnymi kremami, cztery babeczki z różnymi polewami i pięć bez różnych kolorów. Na ile różnych sposobów Adam może wziąć trzy ciastka tak, aby dokładnie dwa z nich były tego samego rodzaju (czyli by były albo dokładnie dwie kremówki, albo dokładnie dwie babeczki, albo dokładnie dwie bezy)?

4. Mamy układ kół zębatych. Koło S ma 10 zębów i zazębia się z kołem A o ośmiu zębach oraz z kołem B o 20 zębach. Koło A zazębia się z kołem X o 16 zębach, a koło B zazębia się z kołem Y o 16 zębach. Koło S wykonuje 250 obrotów w ciągu minuty. Które z kół X, Y wykonuje więcej obrotów na minutę?

5. W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki, z których krótszy ma długość 5 m. Ponadto wysokość ta jest dwa razy krótsza od dłuższej przyprostokątnej. Jaki jest obwód tego trójkąta?

6. Jacek ma w skarbonce pięć dwuzłotówek, siedem pięciozłotówek, dwie złotówki, a resztę stanowią monety pięćdziesięciogroszowe i dwudziestogroszowe. W sumie w skarbonce jest 30 monet. Czy średnia wartości tych monet może wynosić $1,76$ zł? Odpowiedź uzasadnij.

7. Firma DOM sprzedaje farbę w dużych lub małych pojemnikach w kształcie sześcianu, przy czym krawędź dużego pojemnika jest o 10% większa niż małego. Do małych pojemników nalewana jest farba luksusowa, a do dużych farba zwykła (zawsze do pełna) i oba pojemniki z farbą kosztują tyle samo. O ile procent tańsza jest farba zwykła od luksusowej? Wynik zaokrąglij do pełnych procentów.

8. W trapezie prostokątnym $ABCD$ punkt E leży na dłuższym ramieniu BC i prosta AE jest symetralną odcinka BC, a przekątna AC ma długość 6 m i zawiera się w dwusiecznej kąta DAE. Oblicz pole tego trapezu.

9. W prostopadłościennej komnacie o wysokości 10 m, długości podłogi 32 m, a szerokości 24 m na ścianie na lewo od ściany okiennej wisi gobelin, a ściana na prawo jest pusta. Pozostała ściana jest lustrzana. W rogu sufitu między ścianami lustrzaną i pustą znajduje się mucha, która dostrzegła ziarenko cukru w rogu podłogi między ścianami z gobelinem i okienną i natychmiast wyleciała w stronę cukru z prędkością 8 km/h. O 18 sekund wcześniej z prędkością 4 km/h w kierunku ziarenka wybiegł pająk znajdujący się w rogu podłogi pod muchą. Który ze zwierzaczków dotrze do cukru jako pierwszy?

10. Ile stopni ma miara kąta pomiędzy najkrótszą z przekątnych a bokiem ośmiokąta foremnego?

PMM – rok szkolny 2021/2022 – poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Na pewno mucha musi przejść przez 3 ściany boczne (wtedy wszystko jedno, którą ze ścian niezawierającą punktów P i K wybierzemy) albo drogą przez wierzchołek W. Narysujmy siatkę fragmentu powierzchni bocznej ostrosłupa złożoną ze ścian zawierających punkty P, K oraz wybranej ściany między nimi. Zauważmy, że najkrótsza droga będzie odcinkiem łączącym punkty P i K na tej siatce. Rachunki na kątach pokazują nam, że trójkąt PKW ma kąty $30°$, $30°$ i $120°$ i jego połowa jest trójkątem ekierkowym o znanej przeciwprostokątnej (o długości $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$). W ten sposób możemy policzyć długość podstawy trójkąta PKW, która równa jest 1 i jest długością poszukiwanej przez nas trasy. Trasa przez wierzchołek W jest oczywiście (z nierówności trójkąta) dłuższa.

2. W pierwszym syropie były 4 części cukru i 96 części wody, a w końcowym – 12 części cukru i 96 części wody. Ponieważ $12/108 = 1/9$, to Basia otrzymała syrop o stężeniu $11\frac{1}{9}\%$.

3. Dwa ciasteczka z pięciu różnych można wybrać na $\frac{5 \cdot 4}{2}$ sposoby i analogicznie dla dowolnej liczby ciasteczek. Zatem szukana ilość to $\frac{3 \cdot 2}{2}(4+5) + \frac{4 \cdot 3}{2}(3+5) + \frac{5 \cdot 4}{2}(3+4) = 145$.

4. Na jeden obrót koła S koło A wykonuje $\frac{10}{8}$ obrotów, zatem koło X wykona $\frac{10}{8} \cdot \frac{8}{16} = \frac{10}{16}$ obrotów. W tym samym czasie koło Y wykona $\frac{10}{20} \cdot \frac{20}{16}$ obrotów. Oba koła X, Y wykonują równą liczbę obrotów w tym samym czasie.

5. Długości będziemy wyrażać w metrach. Jeżeli h oznacza długość wysokości, to dłuższy odcinek przeciwprostokątnej ma długość $\sqrt{3}h$, co wynika z twierdzenia Pitagorasa. Dłuższa przyprostokątna jest zatem przeciwprostokątną w trójkącie o bokach h, $\sqrt{3}h$ oraz $2h$, więc jest to trójkąt „ekierkowy” o kątach $90°$, $60°$ i $30°$. Z rachunku kątów wynika, że również drugi z trójkątów, na jakie wysokość dzieli wyjściowy trójkąt, ma kąty $90°$, $60°$ i $30°$. Wobec tego ma on boki 5, $5\sqrt{3}$ i 10, co daje $h = 5\sqrt{3}$. Przeciwprostokątna wyjściowego trójkąta ma długość $5 + 15 = 20$, dłuższa przyprostokątna ma długość $10\sqrt{3}$, a krótsza 10. Obwód trójkąta wynosi $30 + 10\sqrt{3}$ m.

6. Załóżmy, że średnia wartości monet wynosi $1,76$ zł, wtedy suma wartości nominalnych wynosi $52,8$ zł. Ponieważ suma czternastu wymienionych monet wynosi 47 zł, to monet groszowych jest 16, a ich sumaryczna wartość to 580 gr. Łatwo wywnioskować, że dwudziestogroszówek może być 4 lub 9 lub 14, a odpowiednie liczby pięćdziesięciogroszówek to 12 lub 7 lub 2. W żadnym z tych trzech przypadków nie otrzymamy sumy wartości 580 gr. Odpowiedź na postawione pytanie brzmi: nie.

7. Objętość dużego pojemnika to $(1,1)^3$ objętości małego, zatem cena zwykłej farby to $\frac{1}{(1,1)^3} \approx 0,751$ ceny farby luksusowej. Wynika stąd, że cena farby zwykłej jest o ok. $1 - 0,751 \approx 25\%$ mniejsza od ceny farby luksusowej.

8. Oczywiście kąt ABC nie może być prosty, zatem prostym jest kąt DAB. Ponieważ punkt A leży na symetralnej odcinka BC, to $AB = AC$ i prosta AE jest dwusieczną kąta BAC. Daje to równość kątów BAE, EAC, CAD. Ponieważ suma tych kątów jest kątem prostym, to miara każdego z nich wynosi $30°$. Okazuje się, że trójkąt ABC jest równoboczny o boku 6 m, a ACD jest połową takiego trójkąta. Krótsza podstawa trapezu (odcinek CD) ma więc długość 3 m, a wysokość trapezu (odcinek AD) ma długość $3\sqrt{3}$ m. Teraz łatwo jest obliczyć pole trapezu, które wynosi $13,5\sqrt{3}$ m^2.

9. Prędkość pająka to $\frac{10}{9}$ m/s, a muchy $\frac{20}{9}$ m/s. Odległości będziemy wyrażać w metrach, a czas w sekundach. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że pająk ma do pokonania dystans 40, a mucha $10\sqrt{17}$. Od momentu startu muchy do pokonania swojego dystansu pająk potrzebuje $40 : \frac{10}{9} - 18 = 18$ czasu, a mucha $10\sqrt{17} : \frac{20}{9} = 4,5\sqrt{17} > 18$. Pająk dotrze pierwszy.

10. Suma kątów ośmiokąta foremnego wynosi $6 \cdot 180°$, zatem każdy z nich ma miarę $135°$. Jeżeli weźmiemy co drugi wierzchołek ośmiokąta, to będą one wierzchołkami kwadratu, którego bokiem jest najkrótsza przekątna ośmiokąta. Wynika stąd, że podwojony szukany kąt powiększony o kąt prosty daje kąt $135°$. Teraz łatwo znaleźć odpowiedź na postawione pytanie, którą jest $22,5°$.