

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: SP MŁODZICY

ĆWIERĆFINAŁ

1. Basia wypisała wszystkie liczby od 1 do 30. Ponieważ lubiła liczby podzielne przez 3, to każdą z nich Basia zastąpiła jej trzykrotnością. Potem Basia dodała wszystkie wypisane liczby i szepnęła tę sumę misiowi do ucha. Co usłyszał miś?
2. Prostokąt przecięto dwiema liniami równoległymi do krótszego boku i czterema liniami równoległymi do dłuższego boku. Ile prostokątów widzisz?
3. Na klasycznym zegarze jest kwadrans po ósmej. W pewnym czasie kąt który mała wskazówka tworzy z cyfrą 9 (tzn. z odcinkiem, który łączy środek tarczy zegara z cyfrą 9) zmniejszył się o jedną trzecią. Ile razy, w tym czasie, zmaleje kąt jaki tworzy z cyfrą 9 duża wskazówka? Kąty mierzymy w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.
4. Podaj datę tego dnia bieżącego roku, w którym możesz prawdziwie powiedzieć "Minęło już w tym roku trzy razy więcej dni niż pozostało do jego końca".
5. Ile jest liczb co najwyżej trzycyfrowych podzielnych przez 25, dla których iloczyn cyfr nie przekracza liczby 20.
6. Ile zer wystąpi na końcu liczby, która jest iloczynem wszystkich liczb od 2 do 27?
7. Przyjaciele Adam, Basia i Jacek przynieśli na spotkanie cukierki i zaczęli się nimi obdarowywać. Adam oddał połowę swoich cukierków Basi, a Jacek Adamowi siedem cukierków. Następnie Basia dała siedem cukierków, a Adam połowę swoich Jackowi. Okazało się wtedy, że gdyby Adam poczęstował Jacka jednym cukierkiem, to Basia miałaby ich dwa razy tyle co Adam, ale tylko połowę tego co Jacek, który miałby o 15 cukierków więcej niż Adam. Ile cukierków przyniosło każde z przyjaciół?
8. Obwód prostokąta wynosi 2022 cm. Prosta, która dzieli jeden z kątów prostokąta na połowy, dzieli prostokąt na dwie figury, których obwody różnią się o 22 cm. Ile jest równe pole prostokąta?
9. Mama ma 43 lata, a jej dzieci 14, 10 i 7 lat. Za ile lat mama będzie miała tyle lat, co jej dzieci razem?
10. W trójkącie ABC kąt ACB jest prosty, kąt ABC ma 60° i $AB = 17$ cm. Punkt S jest środkiem boku AB , natomiast M jest takim punktem (leżącym na tej samej płaszczyźnie, co trójkąt ABC), że kąt ASM jest prosty, a kąt SMB ma 30° . Jaka jest odległość punktów M i B ?

PMM – rok szkolny 2021/2022 – poziom: SP MŁODZICY
RUNDA ELIMINACYJNA – ĆWIERĆFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Ponieważ Basia potroiła liczby podzielne przez 3, to suma wypisanych liczb wynosiła $1 + 2 + \dots + 30 + 2(3 + 6 + \dots + 30)$. Licząc sprytnie tę liczbę zauważamy, że wynosi ona $15 \cdot 31 + 2 \cdot 5 \cdot 33 = 15(31 + 22) = 795$.
2. Płytką nazwijmy każdy prostokąt, który nie jest podzielony na mniejsze. Połóżmy rozważany prostokąt tak, aby kolumny były złożone z trzech płytek, a wiersze z pięciu. Oczywiście jest 15 prostokątów jednopłytkowych. Prostokątów wymiaru 1×2 (jeden wiersz z dwóch płytek) jest $3 \cdot 4 = 12$, a wymiaru 2×1 (jedna kolumna z dwóch płytek) jest $2 \cdot 5 = 10$. Rozważając wszystkie inne możliwe wymiary otrzymujemy, że prostokątów jest: 9 wymiaru 1×3 , 5 wymiaru 3×1 , 6 wymiaru 1×4 , 3 wymiaru 1×5 , 8 wymiaru 2×2 , 6 wymiaru 2×3 , 4 wymiaru 3×2 , 4 wymiaru 2×4 , 2 wymiaru 2×5 , 3 wymiaru 3×3 , 2 wymiaru 3×4 , 1 wymiaru 3×5 . Zatem widzimy 90 prostokątów.
3. Dystans małej wskazówki do cyfry 9 to trzy ćwierci godziny. Pomniejszając go o jedną trzecią otrzymamy pół godziny, zatem duża wskazówka znajdzie się na cyfrze 6. Ponieważ teraz duża wskazówka znajduje się na cyfrze 3, to jej odległość do cyfry 9 zmaleje dwukrotnie.
4. Ponieważ w tym roku jest 365 dni, to po szukanym dniu pozostanie jedna czwarta z 364, czyli 91 dni. Oznacza to, że trzeba od daty 31 grudnia "odjąć" 91 dni. Otrzymujemy datę 01.10.2022.
5. Liczb kończących się na 00 lub 50 jest 19. Pozostają liczby kończące się na 25. Są to 25, 125, 225. Szukanych liczb jest zatem 22. Jeśli wśród tych liczb zostanie uwzględnione 0 nie powinno się tego traktować jako błąd (oczywiście zero nie musi być uwzględniane w rozwiązaniach).
6. Końcowych zer będzie tyle, ile czynników 5, jeśli czynników 2 jest co najmniej tyle samo. Piątki dadzą liczby 10, 15, 20, 25, czyli pięć czynników 5. Oczywiście dwójek będzie więcej. Rozważana liczba kończy się pięcioma zerami.
7. Łatwo wywnioskować, że ostatni opis dotyczy ilości 5, 10, 20 cukierków odpowiednio u Adama, Basi i Jacka. Zatem po drugim dzieleniu się ilości te były 6, 10, 19, a po pierwszym 12, 17, 6, zaś na początku 10, 12, 13.
8. Odetnijmy od prostokąta kwadrat taki, że jego przekątna leży na prostej dzielącej kąt. Odcinki pozostałe z dłuższych boków prostokąta są takie, że suma ich długości stanowi różnicę obwodów figur opisanych w treści zadania. Zatem każdy z tych odcinków ma długość 11 cm. Nietrudno zauważyć, że obwód kwadratu, to obwód prostokąta pomniejszony o wspomniane odcinki, zatem równa się 2000 cm. Teraz jest jasne, że krótszy bok prostokąta to 500 cm, a dłuższy 511 cm, zatem jego pole wynosi 255500 cm^2 .
9. Co roku mamie przybywa rok, a dzieciom w sumie trzy lata, czyli różnica maleje o dwa lata. Ponieważ teraz różnica ta wynosi 12 lat, to stanie się zerem po sześciu latach.
10. Zauważmy, że trójkąt ABC jest połową trójkąta równobocznego o boku 17 cm. A to oznacza, że odcinek BC ma długość $17 : 2 = 8,5$ cm. Podobnie zauważmy, że trójkąt BSM (i to niezależnie od tego, w którym z dwóch możliwych położenia narysujemy punkt M) również jest połową trójkąta równobocznego o boku długości 17 cm. Odcinek MB jest bokiem tego trójkąta, czyli ma długość 17 cm.