POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: młodzicy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. W cukierni Lukier pączki są pakowane albo po 5 sztuk do zielonych pudełek albo po 3 sztuki do niebieskich pudełek. Antek kupił 35 pączków zapakowanych w sumie do 9 pudełek. Ile pudełek było zielonych?

2. W klasie Adasia jest 24 uczniów. Gdy policzymy ich średni wiek, to otrzymamy 12 lat i 2 miesiące, a gdy uwzględnimy również nauczycielkę matematyki, panią Anię, to otrzymamy 13 lat i 3 miesiące. Ile lat ma pani Ania?

3. Jacek wypisał wszystkie podzielne przez 3 liczby naturalne mniejsze od miliona, których iloczyn cyfr jest równy 7. Ile liczb wypisał Jacek?

4. Profesor Mędrek ma cztery córki (każda jest w innym wieku). Zapytany o to, która z nich jest najstarsza odpowiedział tak:

   ”Ala jest najmłodsza.”
   ”Kinga nie jest ani najmłodsza, ani najstarsza.”
   ”Najstarsza jest Tereska.”
   ”Marylka nie jest najmłodsza.”

   Niestety, tylko trzy z tych wypowiedzi są prawdziwe. Jak ma na imię najstarsza córka Profesora Mędrka?

5. Czy istnieją cztery kolejne liczby naturalne, których suma jest równa 160?

6. Krótszy bok pewnego prostokąta zwiększono dwukrotnie, zaś jego dłuższy bok jedynie o połowę jego długości otrzymując nowy prostokąt. Jaką częścią pola nowego prostokąta jest pole początkowego prostokąta?

7. Czy suma długości przekątnych pięciokąta wypukłego o długościach boków 2021, 2022, 2023, 2024, 2025 może wynieść 22021?

8. Bombonierka kosztuje 25 zł i 20 gr, a przy zakupie dwóch druga jest tańsza o 15%. Antek kupił dwie bombonierki i zapłacił banknotem pięćdziesięciozłotowym. Ile monet otrzymał przy wydaniu reszty, jeśli wiemy, że była to najmniejsza możliwa liczba monet?

9. Antek zaplanował mały remont: postanowił wyłożyć ściany boczne w swoim pokoju płytami kartonowo-gipsowymi o grubości 12,5 mm. Wiedząc, że wysokość pokoju wynosi 2,8 m, zaś podłoga jest prostokątem o wymiarach 3 m na 4 m, oblicz o ile zmniejszy się pole powierzchni ścian w tym pokoju po remoncie.

10. Mamy 9 identycznie wyglądających monet. Wśród nich jest jedna fałszywa, cięższa od pozostałych. Jaka jest minimalna liczba ważeń na wadze szalkowej, pozwalająca znaleźć fałszywą monetę?

PMM – rok szkolny 2021/2022 – poziom: młodzicy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Gdyby wszystkie 9 pudełek były niebieskie, to pączków byłoby 27. Zamiana niebieskiego pudełka na zielone powoduje wzrost liczby pączków o 2, zatem trzeba dokonać czterech takich zamian, aby mieć 35 pączków. Oznacza to, że Antek dostał cztery zielone pudełka.

2. Suma wieków uczniów wynosi 24·(12 lat + 2 miesiące), a powiększona o wiek pani Ani wynosi 25·(13 lat + 3 miesiące). Wiek pani Ani jest różnicą tych wielkości i wynosi 39 lat i 3 miesiące.

3. Jeżeli iloczyn cyfr wynosi 7, to cyframi tymi są 7 oraz same jedynki. Ponieważ szukane liczby są co najwyżej sześciocyfrowe, to muszą mieć dokładnie dwie jedynki lub dokładnie pięć jedynek, co wynika z cechy podzielności przez 9. Zatem pytanie jest o ilość liczb zapisanych za pomocą cyfr 7, 1, 1 oraz 7, 1, 1, 1, 1, 1. Tych pierwszych jest 3, a tych drugich 6, czyli łącznie 9.

4. Załóżmy, że trzecie zdanie jest prawdziwe. Jeżeli nieprawdziwe byłoby zdanie drugie lub czwarte, to przeczyłoby prawdziwości zdania pierwszego (a tylko jedno zdanie jest fałszywe). Jeśli zaś nieprawdziwym byłoby zdanie pierwsze, to żadna z córek nie byłaby najmłodsza. Sprzeczność ta pokazuje, iż zdanie trzecie nie może być prawdziwe – jest więc fałszywe, a pozostałe prawdziwe. Ponieważ zarówno Kinga, jak i Tereska nie jest najstarsza, to najstarsza córka ma na imię Marylka.

5. Nie istnieją. Ponieważ suma pierwszej i czwartej z czterech kolejnych liczb naturalnych jest taka sama, jak suma drugiej i trzeciej, to gdyby takie liczby istniały, to suma drugiej i trzeciej wynosiłaby 80. Nie jest to jednak możliwe, bo wśród dwóch kolejnych liczb naturalnych jedna jest parzysta a druga nieparzysta, więc ich suma nie może być parzysta.

6. Zauważmy, że nowy prostokąt składa się z sześciu "połówek" początkowego prostokąta, gdzie przez "połówkę" rozumiemy połowę prostokąta otrzymaną przez przecięcie równoległe do krótszego boku. Zatem pole początkowego prostokąta stanowi 1/3 nowego.

7. Każda przekątna pięciokąta tworzy trójkąt z pewnymi dwoma bokami, zatem jej długość jest mniejsza od sumy długości tych boków. Sumując takie nierówności stronami otrzymamy, że suma długości przekątnych jest mniejsza od podwojonego obwodu pięciokąta, czyli od $2 \cdot (2021 + 2022 + 2023 + 2024 + 2025) = 20230$. Zatem odpowiedź brzmi NIE.

8. Druga bombonierka kosztowała 21 zł i 42 gr, a całe zakupy 46 zł i 62 gr. Aby wydać resztę wynoszącą 3 zł i 38 gr trzeba użyć co najmniej 7 monet.

9. Przed remontem pole powierzchni ścian pokoju jest równe $2 \cdot 2,8 \cdot (3 + 4) = 39,2\ \mathrm{m}^2$. Po remoncie podłoga będzie prostokątem o wymiarach $(3-0,025) \times (4-0,025)$ (wyrażonych w metrach), więc pole powierzchni ścian (wyrażone w m^2 będzie równe)
$$2 \cdot 2,8 \cdot (3 - 0,025 + 4 - 0,025) = 2 \cdot 2,8 \cdot 6,95 = 38,92,$$
zatem pole powierzchni ścian zmniejszy się o $0,28\ \mathrm{m}^2$.

10. Wystarczą dwa ważenia. W pierwszym ważeniu kładziemy na szalkach po trzy monety. Wynik ważenia pokaże, w której trójce monet jest fałszywa (w cięższej w przypadku braku równowagi, a w nieważonej, jeśli waga pokaże równowagę). Z tej trójki kładziemy po jednej monecie na szalki. Analogiczne rozumowanie wskaże fałszywą monetę.