

## POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VI – rok szkolny 2021/2022

poziom: SP MŁODZICY

### PÓŁFINAŁ

1. W trójkącie długości dwóch boków wynoszą 91 cm i 7,43 m. Jaka jest długość trzeciego boku, jeżeli obwód trójkąta wyraża się całkowitą liczbą metrów?
2. Książka ma 423 ponumerowane strony. Ile razy użyto cyfry jeden do ponumerowania stron tej książki?
3. W trójkącie o bokach długości 13 cm, 20 cm, 21 cm najkrótsza wysokość ma długość 12 cm. Ile wynosi długość najdłuższej wysokości?
4. Uzasadnij, że liczba  $2022+2022\cdot 2022\cdot 2022$  jest podzielna przez 10.
5. W pięciokącie wypukłym  $ABCDE$  kąt  $EAB$  wynosi  $120^\circ$ , przekątne  $AD$  i  $AC$  mają równe długości, kąty  $DAC$  i  $BAC$  są równe, kąt  $ADE$  ma miarę  $40^\circ$ , a kąt  $DEA$  ma  $100^\circ$ . Ponadto kąt  $ACB$  jest połową kąta  $ADC$ . Oblicz miarę kąta  $CBA$ .
6. Ile jest różnocyfrowych liczb czterocyfrowych podzielnych przez 12, w których zapisie występują wyłącznie cyfry 2, 3, 4, 6?
7. Ala, Ola i Jola przyniosły na zajęcia 17 kasztanów. Ola przyniosła cztery razy więcej kasztanów niż Jola, a Ala przyniosła ich najmniej. Ile kasztanów przyniosła każda z dziewczynek?
8. Ktoś zjadł cukierka przeznaczonego dla Basi, która podejrzewała o ten niecny czyn jednego z chłopców: Adama, Antka, Bartka i Jacka. Basia spytała każdego z nich co wiedzą o tej kradzieży i usłyszała kolejno odpowiedzi.  
Adam: „To nie ja!”  
Antek: „To Adam.”  
Bartek: „Adam i Antek kłamią.”  
Jacek: „To Bartek.”  
Kto zjadł cukierka, jeżeli dokładnie połowa chłopców skłamała?
9. Która z liczb  $\frac{2022\cdot 2022}{2021\cdot 2023}$  i  $\frac{2021\cdot 2023}{2022\cdot 2022}$  jest większa? Uzasadnij wybór bez wykorzystania kalkulatora.
10. Mucha znajduje się w wierzchołku betonowej kostki sześciennej o krawędzi długości 1 m i chce dojść do najdalszego wierzchołka tej kostki. Czy może tak wybrać drogę marszu, aby przejść mniej niż 2 m?

**PMM – rok szkolny 2021/2022 – poziom: SP MŁODZICY**  
**RUNDA ELIMINACYJNA – PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ**

1. Długości wyrażamy w metrach. Szukana długość jest pomiędzy różnicą i sumą danych długości boków, czyli między 6,52 oraz 8,34. Ponieważ obwód trójkąta to 8,34 powiększone o szukaną wielkość, to długość trzeciego boku jest liczbą całkowitą powiększoną o 0,66, zatem wynosi 6,66 lub 7,66. Obie wartości są możliwe.
2. Cyfra 1 wystąpi na miejscu setek 100 razy, na miejscu dziesiątek  $5 \cdot 10 = 50$  razy, a na miejscu jedności  $4 \cdot 10 + 3 = 43$  razy, czyli w sumie 193 razy.
3. Najkrótsza wysokość jest opuszczona na najdłuższy bok, co wynika ze wzoru na pole trójkąta. Z tego wzoru wynika także, że pole rozważanego trójkąta to  $126 \text{ cm}^2$ , zatem szukana długość wynosi  $2 \cdot 126 / 13 = 252 / 13 \text{ cm}$ .
4. Ponieważ drugi składnik kończy się cyfrą 8, to suma kończy się cyfrą 0. Oznacza to podzielność sumy przez 10.
5. Nietrudno obliczyć, że  $\angle EAD = 40^\circ$ , zatem  $\angle DAC = \angle CAB = 40^\circ$ . Ponieważ trójkąt  $CDA$  jest równoramienny, to  $\angle ADC = 70^\circ$ , czyli  $\angle ACB = 35^\circ$ . Teraz jest jasne, że  $\angle CBA = 105^\circ$ .
6. Każda z rozważanych liczb ma sumę cyfr równą 15, zatem jest podzielna przez 3. Wspomniany w treści zadania warunek podzielności jest równoważny podzielności przez 4. Załóżmy, że liczba kończy się cyfrą 2 lub 6, wtedy przedostatnią cyfrą musi być 3, a pozostałe cyfry są w dowolnej kolejności, zatem takie liczby są cztery. Jeśli liczba kończy się cyfrą 4, to przedostatnią cyfrą musi być 2 lub 6, zatem takich liczb jest także cztery. Ponieważ rozważane liczby są parzyste, to rozpatrzyliśmy wszystkie przypadki. Szukanych liczb jest osiem.
7. Możliwe są następujące ilości kasztanów przyniesionych przez Jolę, Olę i Alę (wypisane w tej kolejności): 1, 4, 12 lub 2, 8, 7 lub 3, 12, 2. Tylko w ostatnim przypadku Ala przyniosła najmniej kasztanów.
8. Ponieważ Adam i Antek przeczą sobie, to jeden z nich kłamie, a drugi nie. Stąd wynika, że Bartek kłamie, zatem Jacek mówi prawdę, bo kłamało dokładnie dwóch chłopców. Cukierka zjadł Bartek.
9. Ponieważ rozważane liczby są względem siebie odwrotne, wystarczy sprawdzić, która z nich jest większa od 1. Mamy  $\frac{2021 \cdot 2023}{2022 \cdot 2022} = (1 - \frac{1}{2022})(1 + \frac{1}{2022}) = 1 - \frac{1}{2022} \cdot \frac{1}{2022} < 1$ . Większą jest pierwsza z tych liczb.
10. Nie. Rozważając dwie sąsiednie ściany sześcianu rozłożone płasko zauważamy, że najkrótsza droga jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 m i 2 m, zatem, jako najdłuższy bok tego trójkąta, ma ona więcej niż 2 m długości.