POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VII – rok szkolny 2022/2023

poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. Znajdź pole trójkąta ABC, jeśli $A = (0, 0)$, $B = (8, 2)$, zaś $H = (21, -63)$ jest punktem przecięcia się prostych zawierających wysokości tego trójkąta.

2. Iluelementowy jest zbiór, który posiada dokładnie 92 podzbiory o co najwyżej dwóch elementach?

3. Długości krawędzi prostopadłościanu tworzą ciąg geometryczny. Określ, jaka jest długość jego przekątnej, jeżeli ma on objętość 216, a pole powierzchni całkowitej jest równe 252.

4. Spośród wierzchołków sześciokąta foremnego o boku długości 2 wybieramy losowo trzy różne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrane punkty są wierzchołkami trójkąta o polu mniejszym niż π?

5. Znajdź tangens kąta ostrego między środkowymi trójkąta prostokątnego równoramiennego poprowadzonymi z wierzchołków kątów ostrych.

6. Wykaż, że jeśli $2(d+D) = bB$, to co najmniej jedno z równań $x^2+bx+d = 0$, $x^2+Bx+D = 0$ ma pierwiastek rzeczywisty.

7. Rozstrzygnij, czy promień kuli wpisanej w czworokątny ostrosłup prawidłowy o wszystkich krawędziach równych stanowi mniej niż $\frac{1}{4}$ długości krawędzi.

8. O najmniejszym kącie α pewnego trójkąta wiadomo, że $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2\sqrt{2}$. Oblicz $\sin\alpha$.

9. Znajdź sumę wszystkich liczb naturalnych spełniających nierówność $\sqrt{x-5} > x - 11$.

10. Rozwiąż równanie $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_3 16$.

PMM – rok szkolny 2022/2023 – poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. Nietrudno uzasadnić, że wierzchołek C jest ortocentrum trójkąta ABH. Ponieważ równanie prostej zawierającej wysokość HD ma postać $8(x-21)+2(y+63)=0$, zaś równanie prostej zawierającej wysokość BF ma postać $21(x-8)-63(y-2)=0$, to punkt C ma współrzędne $(5,1)$. W takim razie pole trójkąta ABC wynosi 1.

2. Jeżeli n jest liczbą elementów rozważanego zbioru, to $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=92$, zatem $n^2+n-182=0$, czyli $n=13$.

3. Niech długość najkrótszej krawędzi wynosi a. Wtedy pozostałe krawędzie mają długości aq i aq^2 dla pewnego $q \geqslant 1$. Mamy $a^3q^3=216,\ 2a^2(q+q^2+q^3)=252$. Ponieważ $aq=6$, otrzymujemy równanie $2q^2-5q+2=0$, zatem $q=2$. Stąd $a=3$, a pozostałe krawędzie mają długości 6 i 12. Długość przekątnej to $\sqrt{3^2+6^2+12^2}=3\sqrt{21}$.

4. Trzy kolejne wierzchołki sześciokąta dają trójkąt o polu $\sqrt{3}<\pi$, jeśli są wśród nich tylko dwa kolejne, to pole trójkąta wynosi $2\sqrt{3}>\pi$, a w pozostałych przypadkach ("co drugi" wierzchołek) pole to będzie jeszcze większe. Zatem szukamy prawdopodobieństwa wylosowania trzech kolejnych wierzchołków sześciokąta. Takich wyborów jest 6, natomiast wszystkich możliwych wyborów jest $\binom{6}{3}=20$. Szukane prawdopodobieństwo wynosi 0,3.

5. Niech ABC będzie badanym trójkątem, przy czym kąt prosty znajduje się przy wierzchołku C. Bez straty ogólności możemy założyć, że $AC=BC=2$. Niech S oznacza punkt przecięcia się środkowych AE i BD. Łatwo otrzymać z twierdzenia Pitagorasa, że $AE=BD=\sqrt{5}$, natomiast ze stosunku dzielenia się środkowych otrzymujemy $DS=\frac{\sqrt{5}}{3}$ oraz $AS=\frac{2\sqrt{5}}{3}$. Rozważanym kątem jest $\alpha=\measuredangle ASD$. Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ASD mamy $\cos\alpha=\frac{4}{5}$. Daje to $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, zatem $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$.

6. Przypuśćmy, że oba równania nie mają pierwiastków rzeczywistych. Wówczas $b^2-4d<0$ oraz $B^2-4D<0$. Oznacza to, że $b^2+B^2<4(d+D)=2bB$, zatem $(b-B)^2=b^2+B^2-2bB<0$. Sprzeczność ta kończy dowód.

7. Bez straty ogólności możemy założyć, że długości krawędzi wynoszą 1. Oznaczmy promień kuli przez r. Rozważając przekrój płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek ostrosłupa i środki przeciwległych krawędzi podstawy, otrzymamy okrąg o promieniu r wpisany w trójkąt równoramienny o podstawie 1 i ramionach $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (wysokość jednostkowego trójkąta równobocznego). Ponieważ pole trójkąta równe jest połowie iloczynu obwodu i promienia okręgu wpisanego, to $r=\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$, zatem $r>\frac{1}{4}$ (uwaga: należy to uzasadnić bez odwoływania się do przybliżonych obliczeń na kalkulatorze).

8. Ponieważ $\alpha \leqslant 60^\circ$, to $t=\operatorname{tg}\alpha \leqslant \sqrt{3}$. Stąd i z równania podanego w treści zadania otrzymujemy, że $t=\sqrt{2}-1$. Ponieważ $\sin^2\alpha=\frac{t^2}{1+t^2}$, to $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

9. Oczywiście $x \geqslant 5$. Jasne jest, że liczby 5, 6, ..., 11 są rozwiązaniami. Rozważmy $x>11$, wtedy badana nierówność jest równoważna nierówności $x-5>(x-11)^2$, której zbiorem rozwiązań jest $(9;14)$. Otrzymaliśmy, że naturalnymi rozwiązaniami badanej nierówności są wszystkie kolejne liczby od 5 do 13. Ich suma wynosi 81.

10. Oczywiście $x>0$. Przekształcając rozważane równanie, równoważnie dostajemy $\log_3 x^{\log_2 x}=\log_3 16$, a następnie $x^{\log_2 x}=16$. Logarytmując to równanie obustronnie, otrzymujemy równoważnie $(\log_2 x)^2=4$. Zatem $\log_2 x$ jest równy 2 lub -2, czyli $x=4$ lub $x=\frac{1}{4}$.