



POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VII – rok szkolny 2022/2023

poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Trójkąt ABC jest równoboczny. Na prostej AB obrano punkt D taki, że B leży między punktami A i D . Pokaż, że różnica odległości punktu D od prostych AC i BC równa jest wysokości trójkąta.
2. Ile jest liczb o wszystkich cyfrach różnych, dla których iloczyn wszystkich cyfr wynosi 360?
3. Pokaż, że równanie $[x] = \frac{3x}{4}$ posiada dokładnie trzy rozwiązania. Symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .
4. Czworokąt wypukły $ABCD$ podzielono na cztery trójkąty przekątnymi przecinającymi się w punkcie S . Pokaż, że iloczyn pól pewnych dwóch z tych trójkątów równy jest iloczynowi pól pozostałych trójkątów.
5. Pokaż, że jeżeli dla pewnej liczby naturalnej n liczba $w = 81n^4 - 16$ jest podzielna przez 32, to w dzieli się również przez 256.
6. Załóżmy, że $p^2 \geq q^2$ oraz $|p - q| \leq 2$. Pokaż, że w zbiorze rozwiązań nierówności $\frac{x-p}{x+q} > \frac{x-q}{x+p}$ znajdują się co najwyżej dwie liczby całkowite.
7. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Okrąg przechodzący przez punkty A i B przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach X i Y . Pokaż, że BX jest wysokością trójkąta ABC wtedy i tylko wtedy, gdy AY jest wysokością tego trójkąta.
8. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x^2 + 4 = 2y + 2z \\ y^2 + 4 = 2y + 2x \\ z^2 + 4 = 2x + 2z. \end{cases}$$
9. Podaj równania stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$, przechodzących przez początek układu współrzędnych.
10. Rozwiąż nierówność $x^{\log_3 x} + x^{2\log_3 x} > 12$.