POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VII – rok szkolny 2022/2023

poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Trójkąt ABC jest równoboczny. Na prostej AB obrano punkt D taki, że B leży między punktami A i D. Pokaż, że różnica odległości punktu D od prostych AC i BC równa jest wysokości trójkąta.

2. Ile jest liczb o wszystkich cyfrach różnych, dla których iloczyn wszystkich cyfr wynosi 360?

3. Pokaż, że równanie $[x] = \frac{3x}{4}$ posiada dokładnie trzy rozwiązania. Symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

4. Czworokąt wypukły $ABCD$ podzielono na cztery trójkąty przekątnymi przecinającymi się w punkcie S. Pokaż, że iloczyn pól pewnych dwóch z tych trójkątów równy jest iloczynowi pól pozostałych trójkątów.

5. Pokaż, że jeżeli dla pewnej liczby naturalnej n liczba $w = 81n^4 - 16$ jest podzielna przez 32, to w dzieli się również przez 256.

6. Załóżmy, że $p^2 \geqslant q^2$ oraz $|p-q| \leqslant 2$. Pokaż, że w zbiorze rozwiązań nierówności $\frac{x-p}{x+q} > \frac{x-q}{x+p}$ znajdują się co najwyżej dwie liczby całkowite.

7. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Okrąg przechodzący przez punkty A i B przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach X i Y. Pokaż, że BX jest wysokością trójkąta ABC wtedy i tylko wtedy, gdy AY jest wysokością tego trójkąta.

8. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x^2 + 4 = 2y + 2z \\ y^2 + 4 = 2y + 2x \\ z^2 + 4 = 2x + 2z. \end{cases}$$

9. Podaj równania stycznych do okręgu o równaniu $x^2+y^2-10x+4y+25 = 0$, przechodzących przez początek układu współrzędnych.

10. Rozwiąż nierówność $x^{\log_3 x} + x^{2\log_3 x} > 12$.

PMM – rok szkolny 2022/2023 – poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Niech X i Y będą takimi punktami odpowiednio prostych AC i BC, że DX jest prostopadły do AC, a DY do BC. Łatwo wywnioskować, że kąty BDX i BDY mają miarę $30°$. Niech W będzie takim punktem odcinka DX, że WX jest równe wysokości trójkąta ABC. Ponieważ prosta BW jest równoległa do prostej AC, to jest jasne, że BW i DX są prostopadłe, zatem trójkąty BDY i BDW są przystające. Badana różnica wynosi $DX - DY = DX - DW = WX$, co kończy dowód.

2. Ponieważ $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, to liczba spełniająca warunki zadania musi zawierać dokładnie jedną cyfrę 5 oraz co najwyżej jedną cyfrę 1. Jeżeli jedną z pozostałych cyfr jest 9, to musi wystąpić jeszcze cyfra 8 albo zestaw cyfr 2 i 4. Jeżeli nie ma cyfry 9, to muszą wystąpić cyfry 3 i 6, a zatem także 4. Podsumowując, każda liczba spełniająca warunki zadania składa się albo z cyfr 5, 9, 8, albo 5, 9, 8, 1, albo 5, 9, 2, 4, albo 5, 9, 2, 4, 1, albo 5, 3, 6, 4, albo 5, 3, 6, 4, 1. Zatem takich liczb jest $3! + 4! + 4! + 5! + 4! + 5! = 318$.

3. Jeżeli oznaczymy $[x] = n$, to $x = n + r$, gdzie $r \in [0, 1)$. Równanie przyjmuje postać $n = \frac{3n}{4} + \frac{3r}{4}$, czyli $n = 3r$. Wynika stąd, że $n \geqslant 0$. Ponieważ $3r$ jest liczbą całkowitą i $r < 1$, to r może przyjąć tylko jedną z wartości: $0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$, co daje rozwiązania: $x = 0,\ x = \frac{4}{3},\ x = \frac{8}{3}$.

4. Oznaczmy przez α kąt ASB. Ponieważ pole trójkąta równe jest połowie iloczynu dwóch boków i sinusa kąta między nimi, to iloczyn pól trójkątów ABS i CDS wynosi $\frac{1}{2}AS \cdot BS \sin\alpha \cdot \frac{1}{2}CS \cdot DS \sin\alpha$, a iloczyn pól trójkątów BCS i DAS jest równy $\frac{1}{2}BS \cdot CS \sin(180° - \alpha) \cdot \frac{1}{2}DS \cdot AS \sin(180° - \alpha)$. Równość obu wyrażeń wynika ze wzoru $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

5. Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to w także, zatem wtedy nie dzieli się przez 32. Niech $n = 2k$, wtedy $w = 16(81k^4 - 1)$. Jeżeli k jest liczbą parzystą, to wyrażenie w nawiasie jest liczbą nieparzystą, więc w nie dzieli się przez 32. Jeśli więc liczba w dzieli się przez 32, to musi być $n = 2k$ oraz k jest liczbą nieparzystą. Ale wtedy $w = 16(9k^2+1)(3k+1)(3k-1)$ oraz każdy czynnik w nawiasie jest parzysty. Ponadto, ostatnie dwa czynniki są kolejnymi liczbami parzystymi, więc jeden z nich jest podzielny przez 4. Oznacza to, że w dzieli się przez $16 \cdot 16 = 256$.

6. Załóżmy, że $(x + p)(x + q) > 0$, wtedy rozważana nierówność przyjmuje postać $x^2 - p^2 > x^2 - q^2$, czyli $q^2 > p^2$, co przeczy założeniom. Zatem dla rozwiązań musi być spełniona nierówność $(x + p)(x + q) < 0$. Oznacza to, że zbiór rozwiązań zawiera się w przedziale $(-p, -q)$ (gdy $p > q$) lub w przedziale $(-q, -p)$ (gdy $p < q$). Taki przedział ma długość co najwyżej 2 i jest otwarty, więc może zawierać co najwyżej dwie liczby całkowite.

7. Kąty AXB i AYB są równe, zatem jeśli jeden z nich jest prosty, to drugi też. To daje tezę.

8. Dodając równania stronami, otrzymujemy $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 0$, czyli $x = y = z = 2$. Po sprawdzeniu widzimy, że $x = y = z = 2$ jest rozwiązaniem wyjściowego układu.

9. Łatwo obliczyć, że rozważany okrąg ma środek $(5; -2)$ i promień 2. Szukane proste mają równanie postaci $Ax + y = 0$ (gdyż nie są to proste pionowe), a ich odległość od środka okręgu wynosi 2. Zatem $\frac{|5A-2|}{\sqrt{A^2+1}} = 2$, co jest równoważne równości $(5A - 2)^2 = 4A^2 + 4$. Zatem $A = 0$ lub $A = \frac{20}{21}$. Szukane równania stycznych to: $y = 0$ oraz $y = -\frac{20}{21}x$.

10. Oczywiście, $x > 0$. Podstawmy $u = x^{\log_3 x}$, wtedy $u > 0$ oraz badana nierówność przyjmie postać $u^2 + u > 12$. Oznacza to, że $u > 3$, czyli $x^{\log_3 x} > 3$. Po zlogarytmowaniu otrzymujemy $(\log_3 x)^2 > 1$, czyli $\log_3 x < -1$ lub $\log_3 x > 1$. Ostatecznie: $x \in (0, \frac{1}{3}) \cup (3, \infty)$.