BEZRUTYNY

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VII – rok szkolny 2022/2023

poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Rozwiąż nierówność $\sqrt{x^2 - 16} < 2 - x$.
2. W trapezie opisanym na okręgu odcinek łączący środki ramion dzieli go na części, których pola są w stosunku $5 : 11$. Oblicz długości podstaw trapezu, jeśli wiadomo, że jego obwód wynosi 16.
3. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy czterokrotnym rzucie kostką trzy kolejne wyniki utworzą ciąg geometryczny.
4. W trójkącie ABC dany jest wierzchołek $A = (1, 0)$, równanie prostej BC: $x + 3y = 13$ oraz wektor wysokości $\overrightarrow{CD} = [2, -2]$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C.
5. Podstawy czterech logarytmów liczby x tworzą ciąg geometryczny o ilorazie x. Znajdź pierwszy z tych logarytmów, jeśli wiadomo, że suma dwóch pierwszych jest równa sumie dwóch pozostałych.
6. Wśród 10 losów loterii znajduje się jeden los na główną wygraną oraz dwa losy uprawniające do bezpłatnego wyciągnięcia następnego losu. Oblicz prawdopodobieństwo, że pierwsza osoba biorąca udział w loterii wygra główną wygraną przy zakupie jednego losu.
7. Znajdź objętość stożka, jeśli wiadomo, że środek kuli opisanej na tym stożku pokrywa się ze środkiem kuli wpisanej oraz promień kuli wpisanej jest równy r.
8. Wykaż, że $(n + 2)$-cyfrowa liczba $122\ldots21$, w której cyfra 2 występuje n razy (n jest dowolną liczbą naturalną), jest podzielna przez 11.
9. W trójkącie ABC o polu P mamy $AB = a$ ($a > 1$). Prosta równoległa do AB przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach T i S, przy czym $TS = 1$. Proste AS i BT przecinają się w punkcie X. Oblicz pole trójkąta AXT.
10. Oblicz, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 2, 5 lub 9.

PMM – rok szkolny 2022/2023 – poziom: ponadpodstawowy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Rozważana nierówność jest równoważna układowi nierówności: $x^2 - 16 \geqslant 0,\ 2 - x > 0,\ x^2 - 16 < (2-x)^2$, który jest równoważny układowi: $|x| \geqslant 4,\ x < 2,\ x < 5$, co oznacza $x \leqslant -4$.

2. Niech $a > b$ oznaczają podstawy trapezu. Ponieważ odcinek łączący środki ramion ma długość równą średniej arytmetycznej długości podstaw i dzieli trapez na dwa trapezy o równych wysokościach, to stosunek pól tych trapezów wynosi $\frac{\frac{a+b}{2}+b}{\frac{a+b}{2}+a} = \frac{5}{11}$. Mamy stąd $a = 7b$. Z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu wynika, że $a + b$ jest połową obwodu trapezu i wynosi 8. Jest teraz oczywiste, że podstawy badanego trapezu mają długości 1 i 7.

3. W opisanej sytuacji możliwe są ciągi geometryczne stałe, (1,2,4) lub (4,2,1). Każdy z dwóch ostatnich można uzupełnić do ciągu o czterech wyrazach na 12 sposobów (dodając wynik pierwszego rzutu albo ostatniego rzutu). Zatem zdarzeń sprzyjających tego typu jest 24. Policzmy ilość zdarzeń, w których trzy kolejne rzuty dały ten sam wynik. Ciąg stały o trzech wyrazach równych a można na dwanaście sposobów uzupełnić do czterech wyrazów (jak w poprzednim przypadku), jednak dopisanie wyniku a na początku lub na końcu daje taki sam ciąg. Dlatego zdarzeń sprzyjających tego typu jest $6(2 \cdot 6 - 1) = 66$. Ponieważ wszystkich zdarzeń elementarnych jest 6^4, to szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{90}{6^4} = \frac{5}{72}$.

4. Ponieważ wektor $\overrightarrow{CD}$ jest prostopadły do prostej AB, to równanie tej prostej ma postać $2(x-1) - 2y = 0$, czyli $x - y = 1$. Na współrzędne punktu B otrzymujemy układ równań: $x+3y = 13,\ x-y = 1$, stąd $B = (4, 3)$. Współrzędne punktu C spełniają równanie prostej BC, a po dodaniu wektora $[2, -2]$ – równanie prostej AB. Zatem są one rozwiązaniem układu równań: $x + 3y = 13,\ x + 2 - (y - 2) = 1$, stąd $C = (1, 4)$.

5. Podstawy logarytmów stanowią ciąg $a,\ ax,\ ax^2,\ ax^3$, zatem spełnione jest równanie $\log_a x + \log_{ax} x = \log_{ax^2} x + \log_{ax^3} x$. Stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu oraz na logarytm iloczynu, po podstawieniu $\log_a x = t$ otrzymujemy równanie $t + \frac{t}{1+t} = \frac{t}{1+2t} + \frac{t}{1+3t}$. Oczywiście $t = 0$ jest rozwiązaniem. Wtedy $x = 1$ i wszystkie rozważane logarytmy są równe zeru. Załóżmy, że $t \neq 0$, wtedy $1 + \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1+2t} + \frac{1}{1+3t}$. Daje to równanie $3t^2 + 6t + 2 = 0$, skąd $t = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $t = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ostatecznie, są trzy możliwości: 0, $-1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ oraz $-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. Grający może od razu wyciągnąć los wygrywający, na co ma szansę $\frac{1}{10}$. Może też wyciągnąć los dający możliwość ponownego losowania i za drugim razem trafić główną wygraną, a na to ma szansę $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9}$. Jest też możliwość dwukrotnego wylosowania losu przedłużającego nadzieję wygrania, a za trzecim razem trafienia wygranej, na co jest szansa $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8}$. Sumując powyższe szanse, otrzymamy, że poszukiwane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{8}$.

7. Rozważmy przekrój płaszczyzną zawierającą środek kul i wierzchołek stożka. Przekrojem tym będzie trójkąt równoramienny z wpisanym w niego okręgiem oraz z opisanym na nim okręgiem. Okręgi te mają wspólny środek, który zatem jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów oraz symetralnych boków wspomnianego trójkąta. Nietrudno z tego wywnioskować, że trójkąt ów jest równoboczny. Wysokość tego trójkąta jest wysokością

stożka i wynosi $3r$. Bok trójkąta to średnica podstawy stożka i równy jest $2r\sqrt{3}$. Łatwo teraz obliczyć, że objętość stożka wynosi $3\pi r^3$.

8. Odejmując od tej liczby kolejno $11, 110, 1100, \ldots$, otrzymamy liczby postaci $122\ldots 2100\ldots 0$, a po odpowiedniej liczbie odejmowań otrzymamy liczbę $1100\ldots 0$, która oczywiście jest podzielna przez 11. Ponieważ odejmowaliśmy wielokrotności liczby 11, to wyjściowa liczba jest także podzielna przez 11.

9. Trójkąty ABC i TSC są podobne w skali a, zatem pole P' trapezu $ABST$ wynosi $(1 - a^{-2})P$. Oznaczmy przez P_1 pole trójkąta ABX, przez P_2 – pole trójkąta STX, przez P_3 – pole trójkąta AXT (równe polu trójkąta BSX). Mamy obliczyć P_3. Ponieważ trójkąty ABX i STX są podobne w skali a, to $P_1 = a^2 P_2$ oraz $\frac{TX}{XB} = \frac{1}{a}$, co daje $P_3 = aP_2$. Mamy stąd $P' = P_1 + P_2 + 2P_3 = (a + \frac{1}{a} + 2)P_3$, zatem $P_3 = \frac{a-1}{a^2+a}P$.

10. Ze zbioru liczb trzycyfrowych wydzielmy zbiór A liczb parzystych, zbiór B liczb podzielnych przez 5 oraz zbiór C liczb dzielących się przez 9. Szukana liczba to liczba elementów zbioru $A \cup B \cup C$. Jest ona równa sumie liczby elementów zbiorów A, B i C pomniejszonej o sumę liczby elementów zbiorów $A \cap B$ (czyli zbioru $\{100, 110, 120, \ldots, 990\}$), $A \cap C$ (czyli zbioru $\{108, 126, 144, \ldots, 990\}$) oraz $B \cap C$ (czyli zbioru $\{135, 180, 225, \ldots, 990\}$) i powiększonej o liczbę elementów zbioru $A \cap B \cap C$ (czyli zbioru $\{180, 270, 360, \ldots, 990\}$). Zatem poszukiwana liczba równa jest $450 + 180 + 100 - 90 - 50 - 20 + 10 = 580$.