



## POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VII – rok szkolny 2022/2023

poziom: ponadpodstawowy

### PÓŁFINAŁ

1. Odcinek  $AB$  jest dłuższą podstawą trapezu równoramiennego  $ABCD$ ,  $X$  – środkiem odcinka  $BC$ ,  $S$  – punktem wspólnym prostych  $AB$  i  $DX$ . Czy pola trójkątów  $ACD$  i  $BSC$  są równe?
2. Czworokąt wypukły ma pole 2. Pokaż, że dłuższa przekątna ma długość co najmniej 2.
3. Czy liczby  $\sqrt[4]{3}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt{3}$  mogą być wyrazami (niekoniecznie kolejnymi) ciągu geometrycznego?
4. Rozwiąż równanie  $\sin^{2023} x + \cos^{2023} x = 1$ .
5. Znajdź wszystkie liczby naturalne  $n$  takie, że obie liczby  $7^n - 4$ ,  $7^n + 4$  są pierwsze.
6. Czy istnieje pięciokąt wypukły taki, że każda przekątna dzieli go na figury, dla których stosunek pól wynosi 2?
7. Dany jest ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie 1 i różnicy będącej dodatnią liczbą wymierną. Pokaż, że nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu posiada wspólny dzielnik pierwszy.
8. Określ, ile nieparzystych liczb naturalnych mniejszych niż 1000 ma dokładnie 6 dzielników dodatnich.
9. Rozważmy następującą procedurę: trójkę liczb całkowitych  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , zastępujemy trójką liczb  $|a - b|$ ,  $|b - c|$ ,  $|c - a|$ . Tę procedurę wykonujemy dla nowej trójki liczb itd., otrzymując ciąg trójek liczb całkowitych. Pokaż, że w każdym takim ciągu jest taka trójka, że każda następna zawiera liczbę 0.
10. Kąty płaskie przy wierzchołku ostrosłupa o podstawie trójkątnej są proste, a krawędzie wychodzące z tego wierzchołka mają długości 3, 4, 4. Znajdź promień kuli wpisanej w ten ostrosłup.