POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VII – rok szkolny 2022/2023

poziom: ponadpodstawowy

PÓŁFINAŁ

1. Odcinek AB jest dłuższą podstawą trapezu równoramiennego $ABCD$, X – środkiem odcinka BC, S – punktem wspólnym prostych AB i DX. Czy pola trójkątów ACD i BSC są równe?
2. Czworokąt wypukły ma pole 2. Pokaż, że dłuższa przekątna ma długość co najmniej 2.
3. Czy liczby $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{3}$ mogą być wyrazami (niekoniecznie kolejnymi) ciągu geometrycznego?
4. Rozwiąż równanie $\sin^{2023} x + \cos^{2023} x = 1$.
5. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że obie liczby $7^n - 4,\ 7^n + 4$ są pierwsze.
6. Czy istnieje pięciokąt wypukły taki, że każda przekątna dzieli go na figury, dla których stosunek pól wynosi 2?
7. Dany jest ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie 1 i różnicy będącej dodatnią liczbą wymierną. Pokaż, że nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu posiada wspólny dzielnik pierwszy.
8. Określ, ile nieparzystych liczb naturalnych mniejszych niż 1000 ma dokładnie 6 dzielników dodatnich.
9. Rozważmy następującą procedurę: trójkę liczb całkowitych a, b, c, zastępujemy trójką liczb $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-a|$. Tę procedurę wykonujemy dla nowej trójki liczb itd., otrzymując ciąg trójek liczb całkowitych. Pokaż, że w każdym takim ciągu jest taka trójka, że każda następna zawiera liczbę 0.
10. Kąty płaskie przy wierzchołku ostrosłupa o podstawie trójkątnej są proste, a krawędzie wychodzące z tego wierzchołka mają długości $3, 4, 4$. Znajdź promień kuli wpisanej w ten ostrosłup.

PMM – rok szkolny 2022/2023 – poziom: ponadpodstawowy

PÓŁFINAŁ

1. Tak. Trójkąty BSX i DCX mają równe kąty oraz $BX = CX$, zatem są przystające. Wynika stąd, że $BS = CD$. Rozważane w zadaniu trójkąty mają równe boki równoległe do AB oraz równe wysokości opuszczone na te boki, zatem ich pola są równe.

2. Przy ustalonych długościach przekątnych pole czworokąta jest największe, jeżeli przekątne są prostopadłe. W takim przypadku pole czworokąta jest równe połowie iloczynu długości przekątnych. Wynika z tego, że iloczyn długości przekątnych czworokąta jest nie mniejszy od podwojonego jego pola. W rozważanym przypadku iloczyn długości przekątnych wynosi co najmniej 4, więc nie mogą obie być krótsze od 2.

3. Odpowiedź pozytywna na to pytanie oznacza istnienie liczb $a > 0,\ q > 1$ takich, że wymienione liczby są odpowiednio równe $aq^n,\ aq^k,\ aq^p$, czyli $a^4q^{4n} = 3,\ a^3q^{3k} = 3,\ a^2q^{2p} = 3$. Mnożąc stronami skrajne równości i dzieląc przez kwadrat środkowej, otrzymamy $q^{4n+2p-6k} = 1$, zatem $2n + p = 3k$. Jeżeli $p = 4n$, to $k = 2n$. Przyjmijmy $n = 1,\ k = 2,\ p = 4$, wtedy nietrudno obliczyć, że dla $a = 3^{\frac{1}{6}},\ q = 3^{\frac{1}{12}}$ rozważane równości są spełnione. Na postawione pytanie odpowiedzią jest TAK.

4. Ponieważ dowolna całkowita dodatnia potęga liczby $\sin x$ (i $\cos x$ także) jest nie większa od 1, to dla rozwiązania x badanego równania każda z liczb $\sin x$ i $\cos x$ jest nieujemna. Poszukajmy rozwiązań w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$. Załóżmy, że $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, wtedy $\sin^{2023} x + \cos^{2023} x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, zatem rozwiązaniami mogą być jedynie $x = 0$ lub $x = \frac{\pi}{2}$. Uwzględniając okresowość funkcji trygonometrycznych i bezpośrednio sprawdzając, wnioskujemy, że rozwiązaniami badanego równania są $x = 2k\pi$ oraz $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

5. Wśród liczb $k - 4,\ k,\ k + 4$ jest dokładnie jedna podzielna przez 3, zatem wśród liczb $7^n - 4,\ 7^n,\ 7^n + 4$ także. Ponieważ liczba 7^n podzielną przez 3 nie jest, to $7^n - 4 = 3$, skąd $n = 1$. Sprawdzamy, że $7 - 4$ i $7 + 4$ są liczbami pierwszymi.

6. Taki pięciokąt nie istnieje. Załóżmy, że pięciokąt $ABCDE$ spełnia warunki zadania. Rozważmy dwie przekątne o wspólnym końcu. Łatwo wywnioskować, że dzielą one pięciokąt na trzy trójkąty o takich samych polach. Stąd wniosek, że dowolne trzy wierzchołki pięciokąta wyznaczają trójkąt o polu równym trzeciej części pola pięciokąta. Wynika z tego, że każda przekątna jest równoległa do jednego z boków (jest to konsekwencja tego, że wszystkie wierzchołki leżące poza przekątną pięciokąta są w tej samej od niej odległości). Niech S będzie punktem wspólnym przekątnych AD i CE. Z powyższych uwag wynika, że $ABCS$ jest równoległobokiem, zatem trójkąty ABC i ACS mają równe pola. Jednak pole trójkąta ACS jest mniejsze od pola trójkąta ACD, które z kolei jest równe polu trójkąta ABC. Sprzeczność dowodzi prawdziwości pierwszego zdania w tym rozwiązaniu.

7. Niech r będzie różnicą rozważanego ciągu $\{a_n\}$, a k niech będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że kr jest liczbą naturalną. Wtedy $a_{1+mk} = 1 + mkr$ jest liczbą całkowitą. Łatwo widać, że istnieje wyraz a_s tego ciągu podzielny przez pewną liczbę pierwszą p. Jest jasne, że wyrazy $a_{s+mpk} = a_s + pmkr$ są podzielne przez p dla każdego naturalnego m.

8. Sześć dzielników naturalnych mają liczby postaci p^5 oraz p^2q, gdzie p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Z warunków zadania wynika, że te liczby pierwsze mają być większe od 2. Nierówność $p^5 < 1000$ i wymienione warunki spełnia tylko liczba $p = 3$. Rozważmy nierówność $p^2q < 1000$ wraz z pozostałymi warunkami. Jeżeli $p = 3$, to q jest liczbą pierwszą większą od 3 i mniejszą od 111. Takich liczb jest 27. Jeżeli $p = 5$, to $q < 40$ (ale różne od 2 i od 5). Takich liczb jest 10. Analogicznie rozstrzygamy, że dla $p = 7$ szukanych liczb jest 6, dla $p = 11$ mamy 3 szukane liczby, dla $p = 13$ będzie ich 2 oraz jedna dla $p = 17$. Więcej liczb spełniających warunki zadania nie ma. Szukanych liczb jest 1+27+10+6+3+2+1=50.

9. Zauważmy, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} < \max\{a, b, c\}.$$

Zatem, jeli zaczynamy od trzech liczb dodatnich, po nie więcej niż $n = \max\{a, b, c\}$ krokach wystąpi 0. Jeśli natomiast początkowe liczby są dowolne, to liczby otrzymane po pierwszym kroku są już nieujemne. Wynika stąd, że dla dowolnej początkowej trójki liczb całkowitych w rozważanym ciągu wystąpi trójka postaci 0, x, y. Jeżeli $x = y$, to każda następna trójka jest równa 0, x, x. Jeśli zaś $0 < x < y$, to następna trójka składa się z liczb dodatnich i największa w kolejnej trójce jest mniejsza od y, a któraś z następnych będzie zawierać 0. Wynika stąd, że trójek postaci: zero i dwie różne liczby dodatnie, jest skończenie wiele. Zatem musi pojawić się trójka 0, 0, z lub 0, z, z. Ponieważ procedura wykonana na pierwszej z tych trójek daje drugą, a druga nie zmienia się po wykonaniu procedury, to ciąg trójek od pewnego miejsca jest stały o wyrazach postaci 0, z, z, co daje tezę.

10. Mamy $3V = Pr$, gdzie V, P, r są odpowiednio objętością, polem powierzchni całkowitej i promieniem kuli wpisanej w badany czworościan. Ponieważ każda krawędź boczna jest wysokością tej bryły opuszczoną na odpowiednią ścianę boczną, to $V = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 8$. Twierdzenie Pitagorasa daje długości krawędzi podstawy 5, 5, $4\sqrt{2}$. Ze wzoru Herona pole podstawy jest równe $2\sqrt{34}$, zatem $P = 2\sqrt{34} + 20$, skąd $r = \frac{2}{11}(10 - \sqrt{34})$.