POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VII – rok szkolny 2022/2023

poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. W równoległoboku jeden bok jest dwa razy dłuższy od drugiego. Środek dłuższego boku połączono odcinkami z końcami drugiego dłuższego boku. Jaki kąt tworzą te odcinki?

2. Pojemnik na sól wypełniony w siedemdziesięciu pięciu procentach waży 1 kg 80 dag, a wypełniony w czterdziestu procentach waży 1 kg 10 dag. Ile waży pusty pojemnik?

3. Półtora psa zje dwie i pół kiełbasy w ciągu półtora dnia. Ile kiełbas zje sześćdziesiąt psów w czerwcu?

4. Określ, czy liczba $10^{2022} - 4$ jest podzielna przez 12. A czy jest podzielna przez 18?

5. Antek wypisał wszystkie możliwe sumy trzech liczb naturalnych, których iloczyn wynosi 48. Czy średnia arytmetyczna liczb wypisanych przez Antka jest większa niż 20?

6. Adrian urodził się w pierwszy piątek roku 2004. Jaki był dzień tygodnia w dniu jego osiemnastych urodzin?

7. Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa, a odcinek CS jego wysokością. Wiadomo, że długość BC stanowi 75% długości AB, a także 60% długości AC. Ponadto długość AS wynosi 13, co stanowi 260% długości AC. Jaka jest objętość ostrosłupa?

8. W prostokącie $ABCD$ o polu 1 obrano punkt E na boku AB oraz F na boku AD tak, że E jest cztery razy bliżej A niż B, zaś F jest trzy razy dalej od D niż od A. Oblicz pole trójkąta CEF.

9. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę $60°$, a kąt przy wierzchołku B jest prosty. Punkt F boku BC jest taki, że prosta AF dzieli kąt BAC na równe części. W jakim stosunku punkt F dzieli bok BC?

10. Od prostokąta odcięto, za pomocą jednego, prostego cięcia, kwadrat o boku 22. Tak otrzymany prostokąt podzielono na dwa prostokąty, z których każdy był podobny do wyjściowego. Jakie było pole prostokąta jeśli wiadomo, że wymiary wszystkich prostokątów były całkowite?

PMM – rok szkolny 2022/2023 – poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem, $AB = 2BC$, F jest środkiem boku AB, a G środkiem boku CD. Jasne jest, że odcinek FG dzieli równoległobok na dwa romby. Ponieważ przekątna rombu jest dwusieczną jego kąta, to szukany kąt między odcinkami FD i FC jest kątem prostym.

2. $75\% - 40\% = 35\%$ pełnego wypełnienia to 70 dag soli. Zatem 40% wypełnienia to 80 dag soli, a z pojemnikiem waży 110 dag. Stąd pojemnik waży $110 - 80 = 30$ dag.

3. 3 psy zjedzą 5 kiełbas przez półtora dnia, zatem 10 kiełbas przez 3 dni. Stąd 60 psów przez 30 dni zje $20 \cdot 10 \cdot 10 = 2000$ kiełbas.

4. Oczywiście liczba ta jest podzielna przez 4. Ponadto jej zapis dziesiętny kończy się cyfrą 6, a pozostałe cyfry są równe 9. Wynika stąd, że rozważana liczba dzieli się przez 12, ale nie przez 18.

5. Tak. Jeżeli najmniejszą z tych liczb jest 1, to drugą najmniejszą może być jedna z liczb $1, 2, 3, 4, 6$ i łatwo obliczyć możliwe sumy trzech liczb. Podobnie dla najmniejszej z liczb równej 2, drugą najmniejszą może być liczba 2 lub 3 lub 4. W przypadku najmniejszej liczby równej 3 pozostałe są czwórkami. Możliwe sumy tych liczb to $50, 27, 20, 17, 15, 16, 13, 12, 11$. Ich średnia to $181/9 > 180/9 = 20$.

6. Ponieważ 365 przy dzieleniu przez 7 daje resztę 1, to po roku dany dzień miesiąca jest następnym dniem tygodnia. Oczywiście, jeżeli w okresie tym wystąpi dzień 29 lutego, to zmiana dnia tygodnia wynosi 2. Między styczniem 2004 a styczniem 2022 było 5 dni 29 lutego. Do piątku dnia urodzin Adriana trzeba dodać $18 + 5 = 23$ dni tygodnia, oznacza to dodanie dwóch dni tygodnia. Osiemnaste urodziny Adriana wypadły w niedzielę.

7. Oczywiście $AC = 5$, więc $BC = 3$, stąd $AB = 4$. Jest jasne, że trójkąt ABC jest prostokątny, zatem jego pole wynosi 6. Ponieważ trójkąt ACS jest także prostokątny, to mamy $CS = 12$. Łatwo teraz obliczyć szukaną objętość $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 12 = 24$.

8. Mamy $|EB = \frac{4}{5}|AB|$, $|FD| = \frac{3}{4}|AD|$ oraz $|AB| \cdot |BC| = 1$. Suma pól trójkątów EBC, CDF i AEF wynosi $\frac{4}{5} + \frac{3}{8} + \frac{1}{40} = \frac{4}{5}$, zatem szukane pole to $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

9. Analizując kąty łatwo zauważyć, że trójkąty ABC i ABF są połowami trójkątów równobocznych, a trójkąt AFC jest równoramienny. Wynika stąd, że $|FC| = |FA| = 2|FB|$. Szukany stosunek podziału to $|BF| : |FC| = 1 : 2$.

10. Pole prostokąta wynosiło 968. Nietrudno wywnioskować, że ostatni podział dawał dwa prostokąty przystające. Ponadto krótszy bok wyjściowego prostokąta miał długość 22. Możliwe są dwa przypadki. W pierwszym dłuższe boki mniejszych prostokątów mają długość 22, w drugim jeden z boków ma długość 11. Rozważmy pierwszy przypadek i oznaczmy drugi bok mniejszego prostokąta przez x. Wtedy wyjściowy prostokąt ma boki 22 i $22{+}2x$. Z podobieństwa prostokątów mamy $\frac{22+2x}{22} = \frac{22}{x}$, czyli $x(22 + 2x) = 22^2$. Ponieważ x jest liczbą całkowitą, to jest dzielnikiem prawej strony równania i przyjąć może tylko jedną z wartości: $1, 2, 4, 11, 22, 44, 121, 242, 484$. Po sprawdzeniu otrzymujemy $x = 11$, więc wyjściowy prostokąt miał boki 22 i 44. Pozostał do rozważenia przypadek drugi. Niech x oznacza długość boku małego prostokąta różną od 11. Dłuższy bok większego prostokąta ma długość $22 + x$. Z podobieństwa prostokątów otrzymujemy $\frac{22+x}{22} = \frac{x}{11}$ lub

$\frac{22+x}{22} = \frac{11}{x}$. Pierwsze z tych równań ma rozwiązanie $x = 22$, co daje wymiary wyjściowego prostokąta takie, jak w przypadku pierwszym. Drugie z powyższych równań zapiszmy w postaci $x(22+x) = 11 \cdot 22$. Ponieważ wśród liczb $1, 2, 11, 22, 121, 242$ nie ma rozwiązania tego równania, to nie posiada ono rozwiązań całkowitych dodatnich. Wymiary wyjściowego prostokąta to 22×44. (Zadanie nie jest rozwiązane poprawnie, jeśli uczeń pominął któryś z przypadków.)