POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VII – rok szkolny 2022/2023

poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Prostokąt podzielono dwiema wzajemnie prostopadłymi prostymi na cztery prostokąciki. Okazało się, że suma pól dwóch prostokącików nie mających wspólnego boku jest równa połowie pola prostokąta. W którym miejscu prosta dzieląca prostokąt przecina boki prostokąta?

2. Jacek napisał pewną liczbę całkowitą, pomnożył ją przez sumę jej cyfr, dodał do wyniku 1 i podzielił przez 16. Otrzymał liczbę dwucyfrową o sumie cyfr 2. Jaką liczbę napisał Jacek?

3. Oblicz $\left(1+\frac{2}{5}\right)\left(1+\frac{2}{7}\right)\left(1+\frac{2}{9}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{103}\right)$.

4. Pokaż, że $\sqrt{11,1\ldots1} < 3\frac{1}{3}$, gdzie liczba pod pierwiastkiem ma 2022 cyfry.

5. Czy trójkąt może mieć wysokości o długościach 1, 2, 3?

6. Świstaki zawijały czekolady w sreberka. Pracę zaczęły trzy świstaki tak samo sprawne. Po godzinie dołączyły do nich trzy sprawniejsze świstaki i po dwóch godzinach wspólnej pracy wszystkie czekolady były w sreberkach. Gdyby cała szóstka pracowała razem od początku, to praca byłaby skończona po 2 godzinach i 24 minutach. Jak długo zawijałby czekolady w sreberka jeden bardziej sprawny świstak?

7. Kierowca wyścigowy przejechał tor w ciągu 18 minut. W następnym okrążeniu pokonał tę trasę w ciągu 16 minut. O ile procent wzrosła średnia prędkość na drugim okrążeniu w porównaniu z pierwszym?

8. Liczba n jest naturalna. Pokaż, że liczba $\frac{n^4}{4}+\frac{n^5}{2}+\frac{n^6}{4}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

9. W trójkącie miary dwóch kątów wynoszą 30° i 45°. Wysokość opuszczona na najdłuższy bok ma długość 5 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

10. Jaka jest miara kąta utworzonego przez wskazówki zegara o godzinie 12.12?

PMM – rok szkolny 2022/2023 – poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Niech wspomniane prostokąciki mają wymiary $a \times b$ i $c \times d$, przy czym bok o długości a jest równoległy do boku o długości c. Wtedy pozostałe prostokąciki mają wymiary $a \times d$ i $b \times c$. Ponieważ liczba $ab+cd$ jest połową pola prostokąta, to liczba $ad+bc$ jest jej równa, czyli $ab+cd = ad+bc$. Stąd $a(b-d) = c(b-d)$. Oznacza to, że $b-d = 0$ lub $a = c$. Zatem co najmniej jedna z prostych dzielących prostokąt przechodzi przez środki jego boków.
2. Końcową liczbą jest 11 lub 20. W pierwszym przypadku iloczyn początkowej liczby przez sumę jej cyfr wyniósłby 175=7·25, co daje liczbę 25 napisaną przez Jacka. Jeżeli końcową liczbą jest 20, to początkowy iloczyn wynosi 319=11·29, co daje szukaną liczbę równą 29. Jacek napisał liczbę 25 lub 29.
3. Szukana liczba to $\frac{7}{5} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{11}{9} \cdot \cdots \cdot \frac{105}{103} = \frac{105}{5} = 21$.
4. Rozważana nierówność jest równoważna nierówności $11,1\ldots1 < \frac{100}{9}$. Jest ona spełniona, ponieważ $\frac{100}{9} = 11,11\ldots$.
5. Nie może. Gdyby taki trójkąt istniał, to oznaczając jego boki przez $a,\ b,\ c$ od najdłuższego do najkrótszego) otrzymalibyśmy (rozważając trzy wzory na pole trójkąta) $a \cdot 1 = b \cdot 2 = c \cdot 3$, zatem $b + c = \frac{a}{2} + \frac{a}{3} < a$, co dla boków trójkąta jest niemożliwe.
6. Z warunków zadania wynika, że 36 minut pracy mniej wydajnych świstaków to tyle samo, co 24 minuty sprawniejszych. Inaczej mówiąc, sprawniejszy świstak w określonym czasie wykona o połowę więcej pracy niż mniej sprawny. Niech x oznacza ilość czekolad zawiniętych przez mniej wydajnego świstaka w ciągu godziny. Wtedy ilość czekolad zawiniętych przez świstaki wyniosła $3 \cdot 3x + 3 \cdot 2 \cdot 1,5x = 18x$. Zatem zawinięcie wszystkich czekolad jednemu mniej wydajnemu świstakowi zajmie 18 godzin, a sprawniejszemu 12 godzin.
7. Jeżeli długość toru wynosiła d kilometrów, to prędkość przy pierwszym okrążeniu wyniosła $\frac{d}{18}$ (liczona w km/min), a przy drugim $\frac{d}{16}$. Różnica prędkości wyniosła $\frac{d}{144}$, zatem drugie okrążenie zostało pokonane z prędkością o $\frac{d}{144} : \frac{d}{18} = \frac{1}{8} = 12,5\%$ większą niż pierwsze okrążenie.
8. Rozważana liczba jest równa $\left(\frac{n^2(n+1)}{2}\right)^2$, a liczba $n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ jest liczbą całkowitą.
9. Nazwijmy trójkąt ABC i załóżmy, że kąty przy wierzchołkach A i B mają odpowiednio 30° i 45°. Wówczas kąt przy wierzchołku C ma 105° i najdłuższy bok trójkąta leży naprzeciwko C, a wspomniana w zadaniu wysokość opada z C na bok AB w punkcie D. Z własności trójkątów o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ oraz $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ otrzymujemy: $AC = 10$ cm, $AD = 5\sqrt{3}$ cm oraz $DB = 5$ cm i $BC = 5\sqrt{2}$ cm. Zatem obwód trójkąta wynosi $15 + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ cm.
10. O godzinie 12.00 wskazówki tworzą kąt o mierze 0°. Przez kolejne 12 minut wskazówka minutowa porusza się z prędkością 6° na minutę i wykona obrót o 72°, zaś wskazówka godzinowa porusza się z prędkością jedynie $0,5^\circ$ na minutę, więc obróci się tylko o 6°. W takim razie kąt między nimi będzie wynosił $72^\circ - 6^\circ = 66^\circ$.