POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VII – rok szkolny 2022/2023

poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Adam pomalował połowę spośród liczb $1, 2, 3, \ldots, 100$ na zielono, a Jacek pomalował pozostałe na czerwono. Następnie Jacek każdą czerwoną liczbę odjął od 101, a otrzymane w ten sposób liczby pomalował na fioletowo. Czy suma liczb fioletowych może być większa od sumy liczb pomalowanych przez Adama na zielono?

2. Określ ile cyfr ma wynik działania $\left(4^4 \cdot 5^5 \cdot 8^8 \cdot 10^{10} \cdot 11 \cdot \sqrt{25^{25}}\right)^3$.

3. Antek wypisał wszystkie liczby sześciocyfrowe, które można utworzyć przy użyciu jedynie cyfr 5, 6 i 7 tak, aby każde dwie sąsiednie cyfry w ich zapisach różniły się o jeden. Oblicz, ile liczb wypisał Antek.

4. Na płaszczyźnie narysowano trapez równoramienny, którego przekątne są prostopadłe oraz kwadrat, którego bok jest równy wysokości trapezu. Która z figur ma większe pole?

5. Pewna liczba naturalna przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, a przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3. Znajdź resztę z dzielenia tej liczby przez 12.

6. Z pewnej liczby dwucyfrowej utworzono trzy liczby: pierwszą przez dopisanie cyfry 1 na początku, drugą przez dopisanie cyfry 5 w środku, a trzecią przez dopisanie cyfry 2 na końcu. Uzasadnij, że suma otrzymanych liczb powiększona o 1 jest podzielna przez 3.

7. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym przekątna ściany bocznej i dłuższa przekątna podstawy mają taką samą długość. Objętość tego graniastosłupa wynosi 36. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły.

8. W pięciokącie $ABCDE$ o wszystkich kątach rozwartych, kąty o wierzchołkach A, B, C wynoszą odpowiednio $100°$, $110°$, $120°$, a proste BC i DE przecinają się pod kątem $40°$. Znajdź wszystkie kąty pięciokąta oraz kąt między prostymi AE i CD.

9. Basia, Jacek i Bartek mają razem 87 cukierków. Gdyby Bartek oddał Jackowi pewną liczbę cukierków to wszyscy mieliby ich tyle samo. Ile cukierków ma każde z nich, jeżeli liczby te dla Jacka i Bartka są liczbami pierwszymi? Rozważ wszystkie przypadki.

10. Zmieszano trzy syropy cukrowe: 10 litrów o stężeniu 8%, 4 litry o stężeniu 10% i 12 litrów trzeciego syropu o nieznanym stężeniu. Otrzymano syrop o stężeniu 12%. Jakie stężenie miał trzeci syrop?

PMM – rok szkolny 2022/2023 – poziom: SP JUNIORZY

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Obie te sumy są równe. Rozważane liczby połączmy w pary takie, że suma liczb w parze wynosi 101. Zauważmy, że odjęcie liczby od 101 zamienia liczbę na drugą w parze. Zatem Jacek zamalowywał parę czerwoną na fioletową, a w parze różnokolorowej zmieniał zieloną na fioletową. Par zielonych było tyle samo, co czerwonych, więc także tyle samo, co fioletowych. Wynika z tego, że suma liczb zielonych znajdujących się w jednokolorowych parach równa była sumie liczb fioletowych w jednokolorowych parach. Natomiast każda liczba zielona w zielono-czerwonej parze została pomalowana przez Jacka na fioletowo. Z tego wynika stwierdzenie umieszczone na początku rozwiązania.

2. Badana liczba jest równa $2^{96} \cdot 5^{90} \cdot 10^{30} \cdot 11^3 = 85184 \cdot 10^{120}$, zatem ma 125 cyfr.

3. W wypisanych liczbach po cyfrze 6 występuje cyfra różna od 6 (czyli są dwie możliwości: 5 lub 7), a po cyfrze różnej od 6 występuje cyfra 6 (czyli jest tylko jedna możliwość). Innymi słowy, wypisane liczby to wszystkie takie, w których co druga cyfra jest szóstką, a pozostałe są piątką lub siódemką. Wynika stąd, że Antek wypisał 8 liczb zaczynających się cyfrą 6 oraz 8 liczb zaczynających się cyfrą 5 lub 7. Razem wypisał 16 liczb.

4. Z końca krótszej podstawy trapezu opuśćmy wysokość. Ponieważ przekątne trapezu równoramiennego są prostopadłe, to kąt między podstawą i przekątną wynosi $45°$. Łatwo teraz zauważyć, że wspomniana wysokość dzieli trapez na dwie części, z których można złożyć kwadrat wymieniony w treści zadnia. Rozważane czworokąty mają równe pola.

5. Jeżeli szukaną resztę oznaczymy przez r, to rozważana liczba jest postaci $12n + r$, przy czym $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$. Z treści zadania wynika, że r przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, a przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3. Bezpośrednio sprawdzamy, że jedyną liczbą z $\{0, 1, 2, \ldots, 11\}$, która spełnia te warunki jest $r = 7$.

6. eżeli $10a + b$ była wspomnianą liczbą dwucyfrową, to utworzono z niej liczby $100 + 10a + b,\ 100a + 50 + b,\ 100a + 10b + 2$, a ich suma powiększona o 1 wynosi $210a + 12b + 153$ i oczywiście jest podzielna przez 3.

7. Niech a oznacza bok podstawy, wtedy wspomniane przekątne mają długości $2a$. Ściana boczna ma jeden bok długości a i przekątną $2a$, zatem drugi bok (będący równocześnie wysokością graniastosłupa) wynosi $a\sqrt{3}$. Pole podstawy, to pole sześciu trójkątów równobocznych i wynosi $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, zatem objętość graniastosłupa, to $\frac{9a^3}{2} = 36$. Stąd $a = 2$. Teraz łatwo obliczyć pole powierzchni bryły i wynosi ono $36\sqrt{3}$.

8. Niech P będzie punktem przecięcia się prostych BC i DE, a punkt Q prostych AE i CD. Ponieważ suma kątów czworokąta $ABCQ$ równa jest $360°$, to kąt przy wierzchołku Q równy jest $30°$. Analogicznie pokazujemy, że w czworokącie $EABP$ przy wierzchołku E wynosi $110°$. Ponieważ suma kątów pięciokąta to $540°$, kąt przy wierzchołku D ma miarę $100°$.

9. Treść zadania pokazuje, że Basia ma trzecią część wszystkich, czyli 29 cukierków. Zatem Bartek i Jacek mają razem 58 cukierków, przy czym Jacek ma ich nie więcej niż Bartek. Przez bezpośrednie sprawdzenie znajdujemy, że szukane liczby cukierków Jacka i Bartka to odpowiednio: 5 i 53 lub 11 i 47 albo też 17 i 41.

10. Niech trzeci syrop ma stężenie $x\%$. Obliczając ilość cukru w składnikach i całości otrzymujemy $8 \cdot 10 + 10 \cdot 4 + x \cdot 12 = 12(10 + 4 + 12)$, skąd $x = 16$.