POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VII – rok szkolny 2022/2023

poziom: SP JUNIORZY

FINAŁ

1. Liczba naturalna dzieli się przez 121, ale nie dzieli się przez 1331. Pokaż, że suma wszystkich jej dzielników jest wielokrotnością liczby 7.
2. Ułamki proste (zwane też ułamkami egipskimi) to odwrotności liczb naturalnych większych od 1: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, itd. Przedstaw liczbę 1 w postaci sumy dziewięciu różnych ułamków prostych.
3. Bartek odjął od pewnej liczby naturalnej sumę jej cyfr, a następnie wytarł jedną cyfrę (niekoniecznie skrajną) otrzymując 2023. Jaką cyfrę wytarł Bartek?
4. Wśród 11 monet 4 są fałszywe. Każda fałszywa moneta jest albo o 1 gram lżejsza albo o 1 gram cięższa od prawdziwej. Antek posiada wagę szalkową ze skalą, która pokazuje o ile gram jest cięższa zawartość lewej szalki od prawej (skala ma podziałkę od -100 do $+100$). Antek wybrał jedną z monet. Czy za pomocą jednego ważenia może ustalić, czy wybrana przez niego moneta jest prawdziwa? Jeśli tak, to w jaki sposób? Jeśli nie, to dlaczego?
5. Znajdź 4 liczby naturalne takie, że żadna z nich nie dzieli się przez żadną z pozostałych, ale kwadrat każdej z nich dzieli się przez każdą z pozostałych.
6. Na okręgu znajduje się 5 czerwonych punktów i dwa zielone. Rysujemy wszystkie możliwe wielokąty wypukłe o wierzchołkach w zaznaczonych punktach (trójkąty, czworokąty, itd.). Czego jest więcej: wielokątów z parzystą czy z nieparzystą liczbą zielonych wierzchołków? O ile?
7. Wewnątrz trójkąta ABC wybrano punkt S. Pokaż, że suma odległości punktu S od wierzchołków trójkąta jest mniejsza od obwodu tego trójkąta.
8. Na płaszczyźnie dane są 2023 punkty i żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Pokaż, że przez każdy z tych punktów można poprowadzić taką prostą, że po każdej jej stronie znajduje się dokładnie 1011 z tych punktów.
9. Oblicz pole trapezu, w którym kąty przy dłuższej podstawie są ostre, którego podstawy mają długości 34 i 20, za ramiona długości 15 i 13.
10. Trzy wielokąty wypukłe mają razem 97 przekątnych. Ile mogą mieć razem boków? Podaj wszystkie możliwości.

PMM – rok szkolny 2022/2023 – poziom: SP JUNIORZY

FINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Oznaczmy rozważaną liczbę przez n. Jeżeli k jest dzielnikiem liczby n niepodzielnym przez 11, to liczby $11k$ i $121k$ są także dzielnikami liczby n. Ponadto każdy dzielnik liczby n jest jednym z wymienionych w poprzednim zdaniu, bo $1331 = 11^3$. Niech S oznacza sumę wszystkich dzielników niepodzielnych przez 11, wtedy suma wszystkich dzielników liczby n jest równa $S + 11S + 121S = 133S = 7 \cdot 19S$ i jest podzielna przez 7.

2. Oczywiście mamy $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Zatem

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\right)\right)$$

   Po zniesieniu nawiasów otrzymamy ułamki proste o mianownikach 2, 3, 12, 18, 72, 108, 432, 648, 1296.

3. Jeżeli od liczby naturalnej odejmiemy sumę jej cyfr, to otrzymamy liczbę podzielną przez 9, zatem suma jej cyfr będzie podzielna przez 9. Po wytarciu jednej cyfry Bartek otrzymał liczbę o sumie cyfr równej 7, zatem wytarta została cyfra 2. Tak mogło być, na przykład, gdy Bartek rozpoczął od liczby 20230. Wówczas: $20230 - 7 = 20223$ i wytarł jedną ze środkowych dwójek.

4. Tak, może. Wystarczy, że rozłoży pozostałe 10 monet po 5 na szalkach swojej wagi. Jeśli waga wskaże liczbę nieparzystą, to jego moneta jest fałszywa. Jeśli waga wskaże liczbę parzystą, to jego moneta jest prawdziwa.

5. Wybierzmy dowolne, parami różne liczby pierwsze, na przykład 2, 3, 5, 7. Oznaczmy przez p ich iloczyn: $p = 210$. Wówczas liczby $2p,\ 3p,\ 5p,\ 7p$ mają wymaganą własność.

6. Jeden z zielonych wierzchołków nazwijmy Lewym, a drugi Prawym. Każdemu wielokątowi, który ma tylko czerwone wierzchołki, odpowiada wielokąt z dodanym Lewym wierzchołkiem, jak również z dodanym Prawym wierzchołkiem, ale też z dodanymi oboma zielonymi wierzchołkami. Wynika stąd, że jeżeli rozważamy wielokąty o co najmniej trzech czerwonych wierzchołkach, to rozważane liczby są równe. Różnica występuje dla wielokątów z jednym lub dwoma czerwonymi wierzchołkami. Wielokątów z dokładnie jednym czerwonym wierzchołkiem jest 5, bo pozostałe wierzchołki muszą być zielone. Do każdych dwóch czerwonych punktów (można je wybrać na 10 sposobów) możemy dobrać wierzchołek Lewy albo Prawy albo oba. Stąd wynika, że wielokątów z nieparzystą ilością (równą 1) zielonych wierzchołków jest o $20 - 15 = 5$ więcej niż wielokątów z parzystą ilością zielonych wierzchołków.

7. Pokażemy, że $AS + SB < AC + CB$. Niech X będzie przecięciem odcinka BC prostą AS (łatwo widać, że taki punkt istnieje). Z nierówności trójkąta mamy $SB < SX + XB$ oraz $AX < AC + CX$. W takim razie $AS+SB < AS+SX+XB = AX+XB < AC+CX+XB = AC+CB$. Analogicznie dowodzimy, że $BS + SC < BA + AC,\ CS + SA < CB + BA$. Dodając te trzy nierówności stronami i dzieląc przez 2 otrzymujemy tezę.

8. Rozważmy dowolny punkt z danych i prostą przechodzącą przez niego, ale nie zawierającą żadnego z pozostałych punktów. Wyobraźmy sobie, że jedna strona prostej jest biała, druga czerwona. Jeżeli każda z kolorowych półpłaszczyzn zawiera tyle samo rozważanych punktów, to wymieniona prosta jest szukaną. Załóżmy, że liczby te nie są równe. Obracajmy prostą wokół wymienionego punktu razem z kolorowaniem. W czasie obrotu punkty zmieniają kolor po jednym, bo na rozważanej prostej nie mogą znaleźć się trzy punkty. Załóżmy, że na początku po czerwonej stronie znajdowało się mniej rozważanych punktów niż po stronie białej. Po obrocie o 180° punkty ze strony białej znalazły się po stronie czerwonej i odwrotnie, zatem po stronie czerwonej znalazło się ich więcej. Oznacza to, że był w czasie obrotu taki moment, kiedy ilości po stronie białej i czerwonej zrównały się.

9. Niech h będzie wysokością trapezu. Rysując wysokości wystawione z końców krótszej podstawy otrzymamy dwa trójkąty o bokach odpowiednio $h,\ 15,\ x$ oraz $h,\ 13,\ y$. Jasnym jest, że $h^2 = 15^2 - x^2 = 13^2 - y^2$, skąd $(x+y)(x-y) = 56$. Ponieważ $x + y = 14$, to $x - y = 4$. A wtedy $x = 9,\ y = 5,\ h = 12$. Stąd pole trapezu jest równe 324.

10. Dla wielokątów o liczbie boków $3,\ 4,\ \ldots,\ 15$ liczba przekątnych wynosi odpowiednio

$$0,\ 2,\ 5,\ 9,\ 14,\ 20,\ 27,\ 35,\ 44,\ 54,\ 65,\ 77,\ 90.$$

Aby suma trzech składników o powyższych wartościach wynosiła 97, musi mieć jedną z postaci: $90+5+2$, $77+20+0$, $65+27+5$, $56+27+14$, $35+35+27$. Odpowiada to sumom liczby boków: $15+5+4,\ 14+8+3,\ 13+9+5$, $7+9+12$, $10+10+9$. Szukane liczby boków to 24, 25, 27, 28, 29.