POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VII – rok szkolny 2022/2023

poziom: SP JUNIORZY

PÓŁFINAŁ

1. Kolarz wyrusza z Gdańska do Tczewa. Równocześnie z Tczewa do Gdańska wyrusza drugi kolarz. Po 72 minutach mijają się. Każdy z nich po dojechaniu do docelowego miasta natychmiast wraca. Przy drugim spotkaniu kolarze zderzyli się czołowo. Ile czasu minęło od pierwszego spotkania do zderzenia, jeżeli każdy z kolarzy jechał ze stałą swoją prędkością?

2. Do liczby trzycyfrowej x dodano 97 i otrzymano liczbę o tej samej cyfrze dziesiątek, cyfrze jedności równej cyfrze setek liczby x, a cyfrze setek równej połowie cyfry jedności liczby x. Znajdź sumę cyfr jedności i setek liczby x.

3. Punkty styczności boków pięciokąta W z okręgiem są wierzchołkami pięciokąta foremnego. Pokaż, że W jest także pięciokątem foremnym.

4. W trapezie prostokątnym największy kąt ma miarę $135°$, a krótsza przekątna i dłuższe ramię są równej długości. Jaki jest stosunek długości przekątnych tego trapezu?

5. Znajdź cyfry a, b, c takie, że $aa + aa + aa + aa = bbc$ (w zadaniu tym aa oraz bbc oznaczają zapis dziesiętny odpowiednich liczb: dwucyfrowej aa lub trzycyfrowej bbc).

6. Czy liczba $400\ldots004$ (zer jest 2023) jest kwadratem liczby naturalnej?

7. Rozwiąż równanie $x^2 - y^2 = 12$ w liczbach całkowitych.

8. Dwa boki trójkąta o polu 10140 mają długość 169. Znajdź długość trzeciego boku.

9. W balonach żółtym i czerwonym znajduje się pewna ilość helu. Urządzenie pompujące jest tak tajemniczo skonstruowane, że jeżeli zwiększymy ilość helu w żółtym balonie o pewną liczbę procent, to także zwiększymy ilość helu w balonie czerwonym, ale o dwa razy większą liczbę procent. Wcześniejsze doświadczenia pokazały, że dopompowanie 10% helu do żółtego balonu skutkuje zwiększeniem ilości tego gazu w obu balonach o 12%. O ile procent trzeba zwiększyć ilość helu w żółtym balonie, aby ilość gazu w obu balonach powiększyła się siedmiokrotnie?

10. Dane są trzy liczby całkowite. Iloczyn dwóch pierwszych z nich równy jest sumie iloczynu pierwszej i trzeciej oraz iloczynu drugiej i trzeciej. Pokaż, że co najmniej dwie z nich są parzyste.

PMM – rok szkolny 2022/2023 – poziom: SP JUNIORZY

PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Do zderzenia doszło w czasie próby minięcia się, zatem suma dystansów przebytych przez kolarzy do zderzenia jest równa trzykrotnej odległości pomiędzy miastami, a suma dystansów do pierwszego spotkania równa się odległości między Gdańskiem i Tczewem. Taka sama jest proporcja między czasami potrzebnymi do przebycia tych dystansów. Czas między spotkaniami jest równy podwojonemu czasowi do pierwszego spotkania, czyli 144 min.

2. Oznaczmy kolejne cyfry liczby x przez a, b, c (gdzie a to cyfra setek). Z warunków zadania wynika, że $c + 7 = a + 10$ oraz $a + 1 = \frac{c}{2}$. Otrzymujemy stąd, że $a = 1,\ c = 4$. Odpowiedzią jest $1 + 4 = 5$.

3. Niech A, B, C będą dowolnymi kolejnymi wierzchołkami rozważanego pięciokąta, P, Q punktami styczności odpowiednio boków AB i BC z okręgiem o środku S. Trójkąty BPS i BQS są prostokątne, mają wspólny bok BS oraz $SP = SQ$ (są to promienie jednego okręgu), zatem te trójkąty są przystające. Ponieważ PQ jest bokiem pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o środku S, to kąt PSQ ma miarę 72°, czyli każdy z trójkątów BPS i BQS ma kąty 36°, 54°, 90°. Z dowolności punktów A, B, C wnioskujemy, że wszystkie kąty rozważanego pięciokąta mają miarę 108°, a jego boki mają długość $2PB$.

4. Niech $ABCD$ będzie rozważanym trapezem, AB jego dłuższą podstawą. Z warunków zadania wynika, że kąt przy wierzchołku B ma miarę 45°, a trójkąt ABC jest równoramienny, zatem także prostokątny. Wynika stąd, że kąt DCA ma miarę 45° i trójkąt ACD jest także prostokątny równoramienny. Jeżeli oznaczymy $AD = a$, to $DC = a$ oraz $AB = 2a$. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa daje, że stosunek przekątnych równy jest $\sqrt{2,5}$.

5. Mamy $44a = 110b + c$, więc c jest wielokrotnością liczby 11, a ponieważ jest cyfrą, to $c = 0$. Stąd $2a = 5b$, zatem $a = 5,\ b = 2$ lub $a = b = 0$. Drugi przypadek oczywiście nie jest możliwy ponieważ a i b nie mogą być równe zero, ale jeśli to rozwiązanie zostanie podane bez żadnego komentarza, to zadanie może być uznane za zrobione (oczywiście o ile znaleziono poprawnie rozwiązanie niezerowe). Za podanie zerowego rozwiązania jako poprawnego można odjąć jeden lub dwa punkty.

6. Oznaczmy przez x liczbę $200\ldots0$ z 1012 zerami. Wtedy rozważana liczba jest równa x^2+4. Widzimy, że $x^2 < x^2+4 < (x+1)^2$, zatem rozważana liczba znajduje się pomiędzy kwadratami kolejnych liczb naturalnych i nie może być kwadratem liczby naturalnej.

   Można też zauważyć, że rozważana liczba daje resztę 2 przy dzieleniu przez 3, a kwadrat liczby naturalnej daje resztę 0 lub 1.

7. Poszukajmy najpierw rozwiązań dodatnich. Rozważane równanie zapiszmy w postaci $(x + y)(x - y) = 12$. Liczby $x + y$ i $x - y$ są tej samej parzystości. Ponieważ liczbę 12 można przedstawić jako iloczyn liczb dodatnich jednakowej parzystości tylko w postaci $12 = 2 \cdot 6$, to rozważane równanie jest równoważne równaniom $x + y = 6,\ x - y = 2$ (bo $x + y > x - y$), zatem $x = 4,\ y = 2$. Pozostałe rozwiązania otrzymamy zmieniając znak liczby x i/lub liczby y. Ostatecznie otrzymujemy 4 rozwiązania: $x = 4$ lub $x = -4$ oraz $y = 2$ lub $y = -2$.

8. Niech ABC będzie rozważanym trójkątem, przy czym $AC = BC = 169$. Ponadto niech AD będzie wysokością tego trójkąta, wtedy ze wzoru na pole trójkąta mamy $AD = 120$. Ponadto $CD^2 = 169^2 - 120^2 = 46{\cdot}289 = 119^2$. Zachodzą dwa przypadki: $BD = 169-CD = 50$ lub $BD = 169+CD = 288$. W pierwszym przypadku $AB^2 = 120^2 + 50^2$, czyli $AB = 130$. W drugim przypadku $AB^2 = 120^2 + 288^2$, czyli $AB = 312$.

9. Niech A, B oznaczają ilości początkowe helu w balonach odpowiednio żółtym i czerwonym. Mamy $1,1A + 1,2B = 1,12(A + B)$, skąd $A = 4B$. Niech x będzie szukaną liczbą procent, wtedy $(1 + \frac{x}{100})A + (1 + \frac{2x}{100})B = 7(A + B)$, skąd $x = 500$. Należy dopompować pięćset procent helu do żółtego balonu.

10. Niech $x,\ y,\ z$ będą tymi liczbami, wtedy $xy = xz + yz$. Jeżeli liczby te są wszystkie nieparzyste lub dokładnie jedna jest parzysta, to wśród liczb $xy,\ xz,\ yz$ mamy odpowiednio same liczby nieparzyste lub dokładnie jedną nieparzystą, co nie jest możliwe ze względu na powyższą równość. Stąd teza.