



POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VII – rok szkolny 2022/2023

poziom: młodzicy

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne ABE i BCF leżące na zewnątrz tego kwadratu. Uzasadnij, że trójkąt DEF jest równoboczny.
2. Suma dwóch liczb naturalnych jest równa 96, a ich największy wspólny dzielnik wynosi 12. Jakie to liczby? Rozważ wszystkie możliwości.
3. Dwie beczki zawierają łącznie 480 litrów wody. Gdyby z pierwszej beczki przelać do drugiej tyle litrów wody, aby zawartość drugiej beczki podwoiła się, a następnie z drugiej beczki przelać do pierwszej tyle litrów wody, aby zawartość pierwszej beczki podwoiła się, to w obu beczkach byłyby jednakowa ilość wody. Ile litrów wody jest w pierwszej beczce?
4. Na okrągłej tarczy zegara połączono odcinkami punkty leżące na jej brzegu i odpowiadające godzinom 1, 4, i 9. Oblicz miary kątów otrzymanego trójkąta.
5. Wiadomo, że suma pewnych dwóch liczb naturalnych wynosi 81. Jeżeli większą z nich podzielimy przez mniejszą, to otrzymamy iloraz 15 i pewną niezerową resztę. Co to za liczby?
6. Długości krawędzi prostopadłościanu są liczbami naturalnymi. Jedna ze ścian ma pole 20, a druga 36. Ile może wynosić objętość tego prostopadłościanu? Rozważ wszystkie możliwości.
7. Bracia Paweł i Gaweł chcą wspólnie kupić rower. Paweł obiecał zapłacić $\frac{5}{8}$ ceny, a Gaweł resztę. Na ten moment zebrali już w sumie $\frac{7}{8}$ potrzebnej kwoty i okazało się, że każdy z nich musi dozbierać jeszcze 60 zł. Ile wynosi kwota, którą obiecał zapłacić Gaweł?
8. W butelce było 0,75 litra mleka. Adam zbyt mocno przechylił butelkę i wylało się z niej aż 0,25 zawartego w niej mleka. Następnie Adam nalał sobie pełną szklankę mleka o pojemności 250 ml oraz napełnił miseczkę kota, której pojemność to ćwierć pojemności szklanki. Ile mleka zostało w butelce?
9. Antek ma 10 ocen z matematyki, w tym dokładnie jedną szóstkę, a pozostałe oceny to trójki, czwórki i piątki. Piątek jest trzy razy więcej niż trójek i o dwie mniej niż czwórek. Ile jest równa średnia ocen Antka z matematyki?
10. Jacek należy do sekcji pływackiej liczącej 24 osoby. Zajęcia sekcji są we wtorki i w czwartki, ale nie wszyscy trenują dwa razy w tygodniu, zważywszy na swoje inne obowiązki. Wiadomo, że każdy członek sekcji trenuje przynajmniej raz w tygodniu. 10 osób z sekcji Jacka trenuje tylko we wtorki, zaś Jacek i jeszcze siedem innych osób trenuje jedynie w czwartki. Z iloma osobami trenuje Jacek w czwartki?

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Kąt DAE ma miarę 150° , zatem miara kąta AED jest równa $\frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$, bo trójkąt DAE jest równoramienny. Z drugiej strony, miara kąta EBF wynosi $360^\circ - 90^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 150^\circ$, zatem kąt BEF również ma miarę 15° . Wynika stąd, że kąt DEF jest równy kątowi AEB i ma miarę 60° . Jest jasne, że kąt EFD ma taką samą miarę, co daje tezę.
2. Podzielmy szukane liczby przez 12 (z warunków zadania wynika, że otrzymamy liczby całkowite). Tak otrzymane liczby nie mają wspólnego dzielnika większego od 1, a ich suma wynosi 8. Oznacza to że są one nieparzyste i tworzą parę liczb 1 i 7 lub 3 i 5. Szukane liczby to 12 i 84 albo 36 i 60.
3. Puszczając film "od tyłu" otrzymalibyśmy na pierwszym kadrze po 240 litrów wody w obu beczkach, na drugim kadrze 120 litrów w pierwszej beczce i 360 litrów w drugiej, następnie 180 litrów wody w drugiej beczce, a w pierwszej 300 litrów. Stąd otrzymujemy, że w pierwszej beczce znajduje się 300 litrów wody.
4. Połączmy wierzchołki trójkąta z środkiem tarczy. Otrzymujemy trzy trójkąty równoramienne o kątach 90° , 150° i 120° , ponieważ mała wskazówka zakreśla kąt 30° w ciągu godziny. Zatem kąty przy podstawach tych trójkątów, to 45° , 15° i 30° . Każdy kąt rozważanego trójkąta jest sumą dwóch kątów wymienionych w poprzednim zdaniu. Widzimy teraz, że szukane kąty to 45° , 60° i 75° .
5. Większa z liczb jest 15-krotnością mniejszej powiększoną o resztę z dzielenia (reszta ta jest mniejsza od mniejszej liczby), zatem liczba 81 jest 16-krotnością mniejszej liczby powiększoną o resztę. Oznacza to, że mniejsza liczba jest ilorazem liczby 81 i liczby 16, czyli mniejsza liczba wynosi 5, a większa 76.
6. Ściany o polach 20 i 36 mają wspólną krawędź. Długość tej wspólnej krawędzi jest dzielnikiem obu wymienionych liczb, zatem może wynosić 1, 2 lub 4. Długości pozostałych krawędzi zależą od wspólnej krawędzi. Łatwo teraz obliczyć możliwe objętości: $1 \cdot 20 \cdot 36 = 720$, $2 \cdot 10 \cdot 18 = 360$ lub $4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$.
7. Braciom brakuje 120 zł, a równocześnie $\frac{1}{8}$ ceny roweru. Gawel obiecał zapłacić $\frac{3}{8}$ ceny, czyli $3 \cdot 120 = 360$ zł.
8. Ponieważ wylało się $\frac{1}{4}$ mleka, to zostało $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ litra. Po odlaniu szklanki mleka i napełnieniu miseczki w butelce zostało $\frac{9}{16} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ litra.
9. Antek ma więcej czwórek niż piątek, zatem czwórek i piątek razem ma ponad sześć razy więcej niż trójkę. Gdyby trójki były dwie lub więcej, to wszystkich ocen byłoby więcej niż 10. Zatem Antek ma jedną trójkę. Teraz łatwo wydedukować, że piątki są trzy, a czwórek jest pięć, co z szóstką daje 10 ocen. Średnia ocena wynosi $\frac{3+5 \cdot 4+3 \cdot 5+6}{10} = 4,4$.
10. Skoro 10 osób trenuje tylko we wtorki, a 8 tylko w czwartki, to 6 osób trenuje w oba te dni. Znaczy to, że w czwartki trenuje 14 osób, w tym Jacek. Jacek trenuje z trzynastoma osobami.