



POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VII – rok szkolny 2022/2023

poziom: SP MŁODZICY

FINAŁ

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje osiem kolejnych liczb całkowitych takich, że suma trzech pierwszych z nich równa jest sumie pięciu ostatnich.
2. Ela rozłożyła 109 cukierków do dwudziestu pudełek (czerwonych, zielonych i żółtych). Do pewnej liczby pudełek włożyła po 3 cukierki. Pozostałe cukierki rozłożyła po równo do wszystkich pustych pudełek, w tym do dwóch czerwonych. Do ilu pudełek Ela włożyła dokładnie po 3 cukierki?
3. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB , zaś punkt E leży na boku AC . Oblicz pole trójkąta EDC , jeśli pola trójkątów DBC i ADE wynoszą odpowiednio 14 i 6.
4. Duży prostokąt podzielono dwiema prostymi na cztery prostokąty. Trzy z tych prostokątów mają obwody 9, 16, 25. Jaki mógł być obwód dużego prostokąta?
5. Szachownicę kwadratową o boku 18 pól pocięto wzdłuż granic pól na 20 prostokątów. Jeden z nich odłożono, a z pozostałych zbudowano kwadrat o boku 10 pól. Jakie są wymiary odłożonego prostokąta?
6. Liczby od 2 do 10 podzielono na dwie grupy w ten sposób, że iloczyn liczb z pierwszej grupy dzieli się przez iloczyn liczb z drugiej grupy. Jaki jest najmniejszy możliwy iloraz iloczynu liczb z pierwszej grupy przez iloczyn liczb drugiej grupy?
7. Jacek i Antek znaleźli ciężarówkę, w której znajdowały się paczki z książkami. W niektórych paczkach była jedna książka, w innych dwie, w innych trzy itd. Jacek i Antek postanowili policzyć ile książek jest w ciężarówce. Jacek po prostu dodał liczbę książek ze wszystkich paczek. Natomiast Antek obliczył liczbę paczek w których była co najmniej jedna książka, następnie liczbę paczek, w których były co najmniej dwie książki, liczbę paczek z co najmniej trzema książkami, itd., następnie dodał otrzymane liczby. Który z nich otrzymał większą liczbę?
8. W pewnej liczbie starto ostatnią cyfrę, w wyniku czego zmalała ona o 2023. Jaka to liczba?
9. W jednym rzędzie rosło 20 tulipanów i 20 narcyzów, przy czym pierwszy i ostatni rósł tulipan. Basia, tworząc bukiet, wycinała kolejno kwiaty począwszy od początku rzędu. Pokaż, że w pewnym momencie w ziemi zostało tyle samo tulipanów co narcyzów.
10. Jaka jest objętość prostopadłościanu, dla którego pola ścian o wspólnym wierzchołku wynoszą 18, 24, 27?

FINAL – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Taka ósemka liczb istnieje. Różnica sumy trzech ostatnich z nich i sumy trzech pierwszych wynosi 15, gdyż różnice: ósmej i trzeciej liczby, siódmej i drugiej oraz szóstej i pierwszej wszystkie równe są 5. Wynika z tego, że suma dwóch środkowych liczb wynosi -15, zatem są to liczby -8 i -7 . Teraz łatwo widać, że szukanymi liczbami są -11 , -10 , -9 , -8 , -7 , -6 , -5 , -4 .
2. Gdyby w każdym pudełku były 3 cukierki, to cukierków byłoby 60. Zatem 49 cukierków zostało dołożonych po równo do pewnej ilości pudełek. Ilość ta jest dzielnikiem liczby 49 i jest mniejsza od 20 ale większa niż 2, zatem wynosi 7, a to oznacza, że odpowiedzią jest 13.
3. Pole trójkąta ADC jest równe 14, bo $AD = DB$. Wynika stąd, że pole trójkąta EDC wynosi $14 - 6 = 8$.
4. Obwód dużego prostokąta jest równy sumie obwodów dwóch mniejszych, które nie mają wspólnego boku, jeżeli suma ta jest większa od obwodu trzeciego małego prostokąta. Zatem obwód ten (w zależności od sposobu podziału) wynosił $9 + 25 = 34$ (np. prostokąty o wymiarach $4 \times 0,5$, $5 \times 7,5$, $7,5 \times 0,5$) lub $16 + 25 = 41$ (np. prostokąty o wymiarach 4×4 , $12 \times 0,5$, $4 \times 0,5$). Suma $9 + 16$ nie jest możliwa, bo równa się 25.
5. Odłożony prostokąt ma powierzchnię równą $18^2 - 10^2 = 224$ pól. Iloczyn jego wymiarów (liczonych w bokach pól) równa się 224, ale żaden z wymiarów nie może przekraczać liczby 18. Ponieważ $224 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$, to tylko iloczyn $14 \cdot 16$ spełnia wszystkie warunki. Wymiary odłożonego prostokąta to 14 pól na 16 pól.
6. W rozkładzie rozważanych liczb na czynniki pierwsze występuje osiem dwójek, cztery trójki, dwie piątki i jedna siódemka. Ponieważ siódemka musi być w pierwszej grupie, to najmniejszy iloraz otrzymany, gdy pozostałe czynniki zostaną podzielone na grupy po równo. Jest to możliwe, np. w pierwszej grupie znajdują się liczby 3, 4, 6, 7, 10, a w drugiej 2, 5, 8, 9. Wtedy rozważany iloraz wynosi 7.
7. Obie liczby są równe, ponieważ każda paczka była liczona tyle razy ile było w niej książek.
8. Oczywiście szukana liczba jest czterocyfrowa z pierwszą cyfrą 2. Ponadto jest ona równa sumie liczby 2023 i jej samej z opuszczoną ostatnią cyfrą. Łatwo wywnioskować, że drugą cyfrą jest 2 lub 3. Zatem przy dodawaniu cyfr dziesiątek nie ma "przeniesienia" jedności do dodawania cyfr setek. Oznacza to, że druga cyfra szukanej liczby jest równa 2. Analogiczne rozważania prowadzą do wniosku, że trzecią cyfrą jest 4, a ostatnią 7. Szukaną liczbą jest 2247.
9. Gdyby to nie było możliwe, to w każdej chwili Basia miałaby więcej tulipanów, tak jak po ścięciu pierwszego kwiatu. Jednak ścinając przedostatni kwiat, ma przecież więcej narcyzów.
10. Iloczyn tych pól jest równy kwadratowi objętości prostopadłościanu, zatem objętość ta wynosi $\sqrt{18 \cdot 24 \cdot 27} = 108$.