POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA VII – rok szkolny 2022/2023

poziom: SP MŁODZICY

PÓŁFINAŁ

1. Grupa uczniów z pewnej szkoły planowała wyjście do kina. Jeden bilet kosztował 20 zł. Zbierano jednak mniejsze wpłaty, ponieważ 288 zł dopłaciła Rada Rodziców. Przy kupnie biletów okazało się, że była promocja na wybrany seans i cena biletów została obniżona do 15 zł. W konsekwencji z zebranych pieniędzy zostało 192 zł. Ilu uczniów wybierało się do kina?

2. Prostokąt $ABCD$ został podzielony na siedem kwadratów: trzy jednakowe żółte, trzy zielone o boku 4 m każdy i jeden czerwony. Boki kwadratów zielonych pokrywają bok AB prostokąta, boki żółtych pokrywają część odcinka BC niepokrytą przez zielone. Jakie jest pole rozważanego prostokąta?

3. Liczby kotów, które posiadają dziewczynki Asia, Basia, Kasia, Wisia i Zosia są różnymi, dodatnimi i jednocyfrowymi liczbami. Asia ma najwięcej kotów, Basia dwa razy więcej niż Kasia, a Wisia trzy razy więcej niż Zosia, ale mniej niż Kasia. Ile kotów ma każda z dziewczynek?

4. Sześć pudełek z czekoladami ustawiono w rzędzie. W pierwszych trzech pudełkach w sumie było 20 czekolad, w pudełkach od drugiego do czwartego 19 czekolad, od trzeciego do piątego 15 czekolad, a w ostatnich trzech 14 czekolad, Rozstrzygnij, czy więcej czekolad było w dwóch środkowych pudełkach razem, czy w dwóch skrajnych.

5. Rozdzielono 77 cukierków pomiędzy dwanaściorgiem dzieci tak, że każde z nich coś dostało. Czy mogło się zdarzyć, że każde dziecko dostało inną liczbę cukierków?

6. Basia pracowała w sklepie. Jacek kupował u niej pewną liczbę jednakowych batonów i chciał zapłacić jednym banknotem. Jednak Basia powiedziała, że brakuje 80 groszy. Jacek kupił o jeden baton mniej i dostał resztę 2 złote i 70 groszy. Uzasadnij, że Basia pomyliła się.

7. Na zlot rowerków dziecięcych przybyło trzynastu rowerzystów na czterdziestu kółkach (rowery miały dwa, trzy lub cztery kółka). Których rowerków było więcej: dwukołowych czy czterokołowych?

8. Suma trzech najmniejszych dzielników dodatnich pewnej liczby naturalnej wynosi 8. Iloma zerami kończy się zapis tej liczby?

9. Długości boków pewnego trójkąta wyrażają się różnymi liczbami pierwszymi. Dwa z nich mają długość 7 i 13, a iloczyn długości wszystkich trzech boków jest mniejszy od 1700. Uzasadnij, że obwód tego trójkąta też wyraża się liczbą pierwszą.

10. Antek bawił się liczbami całkowitymi dodatnimi w następujący sposób. Mając liczbę nieparzystą podwajał ją, liczbę parzystą podzielną przez 3 powiększał o 3, pozostałe liczby zwiększał o 1. Z otrzymanej liczby obliczał następną według powyższych zasad itd. Czy zaczynając od liczby jednocyfrowej Antek mógł otrzymać liczbę 2023?

PMM – rok szkolny 2022/2023 – poziom: młodzicy

PÓŁFINAŁ

1. Do kina wybierało się 96 uczniów. Rzeczywiście, koszt wszystkich biletów zmalał w wyniku dopłaty i promocji o $288 + 192 = 480$ zł, a cena pojedynczego biletu zmalała o 5 zł. Wynika stąd, że kupiono $480 : 5 = 96$ biletów.

2. Oczywiście $AB = 3 \cdot 4 = 12$ m. Bok czerwonego kwadratu jest równy zarówno trzem bokom żółtym, jak też trzem bokom zielonym pomniejszonym o bok żółty. Oznacza to, że czterokrotność boku żółtego jest równa potrojeniu zielonego, czyli 12 m. Stąd mamy, że kwadraty żółte mają długość 3 m, a zatem $BC = 3 \cdot 3 + 4 = 13$ m. Pole prostokąta $ABCD$ wynosi $12 \cdot 13 = 156$ m^2.

3. Wisia ma co najmniej 3 koty, czyli Kasia co najmniej 4, a Basia nie mniej niż 8. Ponieważ Asia ma kotów więcej od Basi, to posiada ich co najmniej 9. Z drugiej strony, skoro liczby kotów są jednocyfrowe, to Asia nie może mieć więcej niż 9 kotów. Widać teraz, że Basia ma 8 kotów, Kasia 4, Wisia 3, a Zosia jednego kota.

4. Rozważając dwie pierwsze trójki pudełek zauważamy, że w czwartym pudełku było o jedną czekoladę mniej niż w pierwszym. Natomiast dwie ostatnie trójki pudełek pokazują, że w trzecim pudełku było o jedną czekoladę więcej niż w ostatnim. Wynika stąd, że w trzecim i czwartym pudełkach razem było tyle samo czekolad, co w pierwszym i ostatnim.

5. Nie. Gdyby każde dziecko dostało inną liczbę cukierków, to cukierków musiałoby być co najmniej $1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = 78$.

6. Jeżeli Basia nie pomyliła się, to jeden baton kosztował 3 zł 50 gr. Zatem koszt zakupu dowolnej liczby batonów byłby wielokrotnością 50 groszy, więc nie mógłby być wartością żadnego banknotu powiększoną o 80 gr.

7. Więcej było czterokołowych rowerków (dokładnie o jeden więcej). Gdybyśmy bowiem każdemu rowerzyście z dwukołowym rowerkiem dodali jedno kółko, a każdemu rowerzyście z czterokołowym rowerkiem zabrali jedno kółko, to wówczas każdy uczestnik zlotu miałby po trzy kółka, czyli kółek byłoby $3 \cdot 13 = 39$. To oznacza, że w wyniku naszych operacji tak naprawdę zabralibyśmy $40 - 39 = 1$ kółko, a to pokazuje, że rowerków dwukołowych było o 1 mniej niż rowerków czterokołowych.

8. Najmniejszym dodatnim dzielnikiem każdej liczby naturalnej jest 1. Zatem szukane dzielniki sumujące się do 8 to $1 + 2 + 5$ lub $1 + 3 + 4$. Jednakże druga z tych możliwości odpada, bo jeśli 4 jest dzielnikiem, to również 2 jest dzielnikiem. W takim razie muszą to być dzielniki 1, 2 oraz 5. Oznacza to, że rozważana liczba naturalna ma na końcu 0. Z drugiej strony, gdyby miała na końcu co najmniej dwa zera, to byłaby podzielna przez 4 (a nie jest). W takim razie zapis tej liczby kończy się jednym zerem.

9. W trójkącie suma długości dowolnych dwóch boków jest większa od długości pozostałego, zatem długość trzeciego boku rozważanego trójkąta jest liczbą pomiędzy $13 - 7 = 6$ oraz $13 + 7 = 20$ i jest liczbą pierwszą różną od 7 i 13 (długości różnych boków są różne). Oznacza to, że długość trzeciego boku może wynosić 11, 17, 19. Sprawdzamy bezpośrednio, że obwody trójkąta wynoszą odpowiednio 31, 37, 39. Dwie pierwsze z tych wartości są liczbami pierwszymi, trzecia nie. Jednak wartość ta nie spełnia warunków zadania, ponieważ odpowiada ona długościom 7, 13, 19, a $7 \cdot 13 \cdot 19 = 1729 > 1700$. Teza została pokazana.

10. Zauważmy, że liczbę nieparzystą Antek mógł otrzymać wyłącznie z liczby parzystej mniejszej o 1 lub 3. Zatem liczbę 2023 mógł on utworzyć z 2022 lub 2020. Jednak reguły mówią, że z liczby 2022 Antek dostałby liczbę $2022 + 3 = 2025 > 2023$, a z 2020 liczbę $2020 + 1 = 2021$, z niej z kolei otrzymałby $2 \cdot 2021 = 4042$. Odpowiedź na postawione pytanie jest negatywna.