

XVII Polygon Matematyczny. Geometria Analityczna w trzech krokach.

1 Krok I

1.1 Wstęp

- Co to jest wektor.
- Wektor w układzie kartezjańskim i bez.
- Wektory jako przestrzeń liniowa: dodawanie, mnożenie przez skalar, liniowa zależność i niezależność wektorów.

1.2 Zadania

Zadanie 1

Udowodnij twierdzenie o odcinku łączącym środki dwóch boków w trójkącie:

Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i równy jego połowie.

Zadanie 2

Udowodnij twierdzenie o środkowych w trójkącie:

Środkowe w trójkącie przecinają się w jednym punkcie i dzielą się w stosunku 2 : 1 (licząc od wierzchołka).

Zadanie 3

Udowodnij twierdzenie:

Łącząc w czworokącie środki kolejnych boków otrzymujemy równoległobok. Dodatkowo, punkt przecięcia się przekątnych tego równoległoboku jest środkiem odcinka łączącego środki przekątnych czworokąta.

Zadanie 4

Wyznacz wzór na współrzędne środka ciężkości trójkąta mając współrzędne jego wierzchołków.

Zadanie 5

Przez środek ciężkości trójkąta ABC przeprowadzono prostą l tak, że punkty A i B leżą po jednej

stronie tej prostej, a punkt C po drugiej. Wykaż, że odległość punktu C od prostej l jest równa sumie odległości punktów A i B od l .

2 Krok II

2.1 Wstęp

- Iloczyn skalarny wektorów.
- Iloczyn skalarny w układzie kartezjańskim.
- Najważniejsze własności iloczynu skalarnego..

2.2 Zadania

Zadanie 6

W trójkącie ABC punkty O , D , E są odpowiednio: środkiem okręgu opisanego na ABC , środkiem boku AB i środkiem ciężkości trójkąta ADC . Udowodnij, że proste CD i OE są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = AC$.

Zadanie 7

W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ punkty M , N , P i Q są środkami odpowiednio boków AB , BC , CD i DE , a punkty R i S są środkami odcinków MP i NQ . Udowodnij, że $SR \parallel AE$ i $SR = AE/4$.

Zadanie 8

Na zewnątrz trójkąta ABC budujemy na jego bokach AB i AC kwadraty $ABPE$ i $ACRD$. Środkami odcinków BC i ED są odpowiednio punkty M i N . Wykaż, że prosta AM jest prostopadła do prostej ED , zaś AN do BC .

Zadanie 9

Wykaż, że w czworokącie przekątne są do siebie prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy sumy kwadratów długości przeciwległych boków są takie same.

Zadanie 10

W trójkącie ostrokątnym ABC punkty M i N są odpowiednio środkami boków AC i BC . Wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina odcinek MN w punkcie D . Symetralna boku AB przecina odcinek MN w punkcie E . Wykaż, że $MD = NE$.

Zadanie 11

Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Punkt P leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkt M jest środkiem odcinka AC . Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem

punktu M . Wykaż, że $BQ = PQ$.

Zadanie 12

Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB = 3BC$. Punkty P i Q leżą na boku AB i spełniają warunek $AP = PQ = QB$. Punkt M jest środkiem boku AC . Wykaż, że kąt PMQ jest prosty.

Zadanie 13

Na przyprostokątnych BC i CA trójkąta prostokątnego ABC zbudowano na zewnątrz kwadraty $ACDE$ oraz $CDFG$. Udowodnij, że okrąg opisany na trójkącie ABC przechodzi przez środek odcinka EF .

3 Krok III

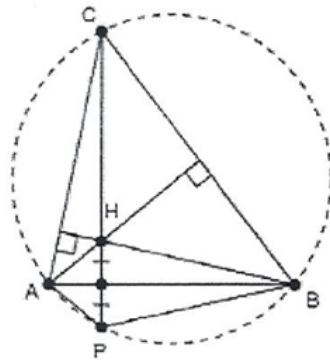
3.1 Oznaczenia

H – ortocentrum – punkt przecięcia się wysokości trójkąta (albo ich przedłużeń)

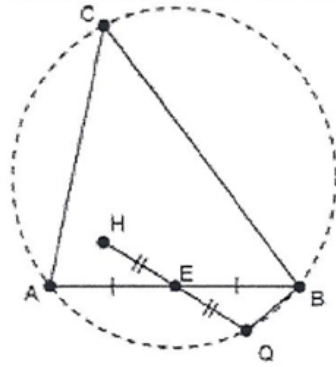
O – środek okręgu opisanego

3.2 Zadania

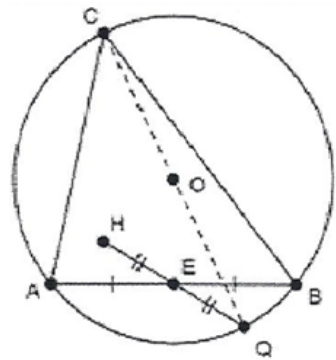
Zadanie 14



Zadanie 15



Zadanie 16



Zadanie 17

