POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA I – rok szkolny 2015/2016

poziom: gimnazjum

ĆWIERĆFINAŁ

1. Podaj, ile dzielników naturalnych ma liczba $231^2 - 1$.

2. Cyfra setek pewnej liczby trzycyfrowej wynosi 2. Jeśli tę cyfrę przeniesiemy na koniec, to otrzymamy liczbę o 25% mniejszą od początkowej. Podaj liczbę początkową.

3. W okręgu o środku O promieniu 12 cm poprowadzono dwie równoległe cięciwy AB i CD. Oblicz odległość między nimi, wiedząc, że miary kątów środkowych AOB i COD wynoszą odpowiednio $120°$ i $60°$.

4. Czy równanie
$$\left(x + 2^{2016}\right)^2 - \left(x - 2^{2016}\right)^2 = 2^{2018}$$
ma rozwiązanie będące liczbą całkowitą?

5. Andrzej i Bartek biegają po owalnej bieżni o długości 600 m. Startują jednocześnie z tego samego miejsca i jeśli biegną w tym samym kierunku, to Andrzej dubluje Bartka po 20 minutach. Jeśli zaś biegną w przeciwnych kierunkach, to mijają się po 3 minutach. Z jaką prędkością, wyrażoną w km/h, biegnie każdy z nich?

6. Czy liczba
$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{7}} + ... + \frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{100}}$$
jest niewymierna?

7. W trapezie środek jednego ramienia połączono z końcami drugiego ramienia. Część trapezu znajdująca się pomiędzy dorysowanymi odcinkami stanowi trójkąt o polu $7\sqrt{3}\ cm^2$. Ile wynosi pole trapezu?

8. Liczbę naturalną nazwijmy *idealnie poskładaną*, jeśli jest równa sumie iloczynu i sumy swoich cyfr. Podaj wszystkie idealnie poskładane liczby dwucyfrowe.

9. Znajdź najmniejsze cztery kolejne liczby naturalne nieparzyste, których suma jest podzielna przez 13.

10. Trzej bracia rozpakowali torebkę cukierków i każdy wziął z niej tyle cukierków, ile miał lat. Najmłodszy, ośmioletni, był niezadowolony z podziału i zaproponował poprawkę do niego. Zatrzymał połowę swojej części, a drugą połowę rozdał po równo braciom. Następnie średni brat zatrzymał połowę z posiadanych w tym momencie cukierków, a drugą połowę rozdał po równo braciom. Na koniec analogicznie postąpił najstarszy z braci. Wtedy okazało się, że wszyscy mają tyle samo cukierków. Ile lat ma każdy z braci?

PMM – rok szkolny 2015/2016 – poziom: gimnazjum

ĆWIERĆFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Ponieważ $231^2 - 1 = 230 \cdot 232 = 2^4 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 29$, to liczba ta ma $5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 40$ dzielników.

2. Oznaczając przez x cyfrę dziesiątek, a przez y cyfrę jedności szukanej liczby, warunek w zadaniu możemy zapisać równaniem: $0,75(200 + 10x + y) = 100x + 10y + 2$, co po uproszczeniu daje $10x + y = 16$. Zatem szukaną liczbą jest 216.

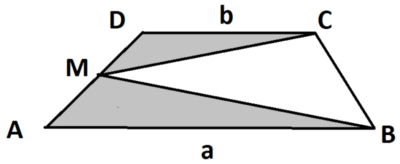
3. Skoro cięciwy AB i CD są równoległe, to wysokości trójkątów AOB i COD wychodzące z wierzchołka O leżą na jednej prostej. Łatwo też obliczamy, że wysokości te mają odpowiednio $6\ cm$ i $6\sqrt{3}\ cm$. Zatem odległość cięciw wynosi albo $6\sqrt{3} + 6\ cm$ (gdy środek okręgu znajduje się między średnicami) albo $6\sqrt{3} - 6\ cm$ (gdy środek okręgu nie znajduje się między średnicami). Za rozważenie tylko jedej z tych sytuacji proponujemy przyznać maksymalnie 5 punktów.

4. Po skorzystaniu ze wzorów skróconego mnożenia i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy równanie $4 \cdot 2^{2016}x = 2^{2018}$, czyli $2^{2018}x = 2^{2018}$. Zatem $x = 1$ jest jedynym rozwiązaniem tego równania. Odpowiedź na pytanie brzmi więc: TAK. Proponujemy, by za brak odpowiedzi "tak" obniżyć ocenę o 1 punkt. Oczywiście samo powiedzenie "tak", bez podania uzasadnienia to 0 punktów. Natomiast w tym przypadku za poprawne uważamy rozwiązanie, gdy uczeń odpowie "tak, ma, gdyż np. $x = 1$ jest rozwiązaniem" oraz uzasadni to wstawiając jedynkę i pokazując, że wtedy równość zachodzi (w zadaniu bowiem nie chodzi o podanie wszystkich rozwiązań).

5. Oznaczmy prędkość Andrzeja (wyrażoną w km/h) przez x, a Bartka przez y. Zauważmy, że jeśli Andrzej i Bartek biegną w tym samym kierunku, to Andrzej chcąc zdublować Bartka musi pokonać dzielącą ich odległość $0,6\ km$, zbliżając się do niego z prędkością wypadkową $x - y$ i zajmuje mu to $\frac{1}{3}$ godziny. Jeśli zaś biegną w przeciwnych kierunkach, to zbliżają się do siebie z wypadkową prędkością $x + y$, dzięki której pokonują dystans $0,6\ km$ w $\frac{1}{20}$ godziny. Otrzymaliśmy zatem układ równań $\begin{cases} \frac{1}{3}(x-y) = 0,6 \\ \frac{1}{20}(x+y) = 0,6 \end{cases}$, którego rozwiązaniem jest $x = 6,9$, $y = 5,1$. Zatem Andrzej biegnie z prędkością $6,9\ km/h$, a Bartek z prędkością $5,1\ km/h$.

6. Usuwając niewymierności z mianowników otrzymamy $\frac{\sqrt{4}-\sqrt{1}}{4-1} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{4}}{7-4} + ... + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{97}}{100-97}$, co z kolei jest równe $\frac{1}{3}(\sqrt{4} - \sqrt{1} + \sqrt{7} - \sqrt{4} + \sqrt{10} - \sqrt{7} + ... + \sqrt{100} - \sqrt{97})$. Po wykonaniu redukcji otrzymujemy $\frac{1}{3}(\sqrt{100} - \sqrt{1})$. Widzimy zatem, że liczba rozważana w zadaniu to 3, zatem odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu brzmi: NIE. Proponujemy, aby za brak wyraźnej odpowiedzi "nie" odjąć 1 punkt. Odpowiedź "nie", bez uzasadnienia, oceniamy na 0 punktów.

7. Sytuację podaną w zadaniu przedstawia poniższy rysunek, na którym punkt M to środek ramienia AD. Jeśli przez h oznaczymy wysokość trapezu, to zarówno wysokość trójkąta ABM idąca na podstawę AB, jak i wysokość trójkąta CDM idąca na podstawę CD wynosi $\frac{1}{2}h$. Zatem suma pól tych trójkątów to $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2}h + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{1}{2}h$, co daje $\frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b)h}{2}$. Oznacza to, że suma pól szarych trójkątów stanowi dokładnie połowę pola trapezu, zatem pole białego trójkąta też jest równe połowie pola trapezu. Pole całego trapezu wynosi więc $14\sqrt{3}\ cm^2$.



8. Oznaczając cyfrę dziesiątek liczby dwucyfrowej przez x, a cyfrę jedności przez y możemy łatwo napisać warunek na to, aby dana liczba była liczbą idealnie poskładaną: $10x + y = xy + x + y$, co daje $9x = xy$. Wiemy jednak, że x jest różne od zera, zatem musi być $y = 9$. Ostatecznie widzimy, że liczby idealnie poskładane to wszystkie te liczby dwucyfrowe, których cyfrą jedności jest 9: 19, 29, 39. 49, 59, 69, 79, 89 i 99.

9. Cztery kolejne nieparzyste liczby naturalne możemy oznaczyć przez n, $n+2$, $n+4$, $n+6$, gdzie n jest nieparzystą liczbą naturalną. Ich suma to $4(n+3)$. Jeśli więc suma ta miałaby się dzielić przez 13, to liczba $n+3$ musiałaby być wielokrotnością liczby 13. Najmniejsze nieparzyste n o tej własności to $n = 23$, zatem poszukiwane liczby to 23, 25, 27, 29.

10. Oznaczmy przez x liczbę lat średniego brata. W takim razie właśnie tyle cukierków wziął on na początku z torebki. Jednak potem otrzymał od najmłodszego brata 2 cukierki i w momencie rozdawania swoich cukierków miał ich $x + 2$. Zostawił sobie połowę, czyli $\frac{1}{2}(x+2)$, a najmłodszemu dał $\frac{1}{4}(x+2)$. Po tym ruchu najmłodszy i średni brat muszą mieć tyle samo cukierków (za chwilę bowiem dostaną po tyle samo cukierków od najstarszego brata), więc musi zachodzić $4 + \frac{1}{4}(x+2) = \frac{1}{2}(x+2)$, czyli $x = 14$. Oznaczmy teraz przez y liczbę cukierków najstarszego brata. Stan po operacjach najmłodszego i średniego z braci jest następujący: najmłodszy i średni mają po 8 cukierków, najstarszy ma $y + 6$ cukierków. Skoro po operacji najstarszego z braci wszyscy mają mieć po równo, to musi być $8 + \frac{1}{4}(y+6) = \frac{1}{2}(y+6)$, co daje $y = 26$. Ostatecznie, wiek braci to: 8, 14 i 26 lat.