

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA I – rok szkolny 2015/2016

poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. Ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 4 i przez 6 dają resztę 2?
2. Jedna z przekątnych rombu jest równa jego bokowi. Jakie długości mają przekątne tego rombu, jeśli jego obwód wynosi 24?
3. Bolek jest starszy od Olka o 3 lata i ma obecnie dwa razy tyle lat, ile Olek miał wtedy, kiedy Bolek miał tyle, ile teraz ma Olek. Ile lat ma Bolek, a ile Olek?
4. Jaka jest cyfra jedności liczby $6^{2015} - 3^{2015}$?
5. Ile jest różnych trójkątów równoramiennych o bokach całkowitej długości, których najdłuższy bok ma długość 10? Pisząc "różne trójkąty" mamy na myśli trójkąty, które nie są przystające.
6. Nauczyciel wchodząc do sali zobaczył plamę soku na podłodze i cztery "podejrzane": Alę, Basię, Celinę i Darię. Zanim zdążył zapytać o cokolwiek, posypały się wyjaśnienia:
Ala: Ja tego nie zrobiłam.
Basia: Sok rozlała Celina.
Celina: To Daria rozlała sok.
Daria: Celina kłamie!
Wiadomo, że tylko jedna z nich powiedziała prawdę. Kto rozlał sok?
7. Z punktu A leżącego na okręgu o promieniu 5 poprowadzono średnicę AB oraz cięciwę AC , tworzącą ze średnicą kąt 60° . Czy pole trójkąta ABC jest większe niż 25?
8. Mateusz skreślił w pewnej liczbie jej cyfrę jedności równą 7 i otrzymał liczbę mniejszą o 34. Ile wynosiła początkowa liczba?
9. Do trzech sklepów dostarczono jednakowe kartony z paczkami herbaty. W każdym z kartonów było tyle samo paczek (ponad pięćdziesiąt). Pierwszy sklep otrzymał pewną liczbę kartonów, w których było łącznie 504 paczki herbaty, drugi sklep otrzymał pewną liczbę kartonów, w których było łącznie 792 paczki, zaś w kartonach dostarczonych do trzeciego sklepu było łącznie 360 paczek. Ile kartonów herbaty otrzymał każdy ze sklepów?
10. Stop srebra i złota waży 4 kg. Złoto w stopie stanowi $77\frac{7}{9}\%$ srebra. Ile złota zawiera ten stop?

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Jeśli x jest taka liczbą dwucyfrową, to liczba $x - 2$ jest podzielna zarówno przez 4 jak i przez 6, a więc przez 12. Wystarczy więc wypisać wielokrotności liczby 12 i zwiększyć je o 2 (w interesującym nas zakresie liczb dwucyfrowych). Otrzymujemy

$$14, 26, 38, 50, 62, 74, 86, 98.$$

Szukanych liczb jest zatem 8.

2. Bok rombu ma długość 6, czyli tyle też wynosi długość krótszej przekątnej. Co więcej, krótsza przekątna dzieli romb na dwa trójkąty równoboczne. Wynika stąd, że długość drugiej przekątnej to podwojona długość wysokości w trójkącie równobocznym o boku 6, czyli $6\sqrt{3}$.
3. Jeśli obecny wiek Bolka oznaczymy przez x , to Olek ma $x - 3$ lat. Gdy Bolek miał $x - 3$ lat, to wiek Olka wynosił $x - 6$. Z treści zadania wynika, że $x = 2(x - 6)$, co daje $x = 12$ (należy sprawdzić, czy uzyskana liczba spełnia warunki zadania). Zatem Bolek ma 12 lat, a Olek 9.
4. Łatwo zauważyć, że 6 podniesione do dowolnej potęgi całkowitej dodatniej daje liczbę kończącą się cyfrą 6. Natomiast ostatnie cyfry liczb

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, \dots, 3^{2015}, \dots$$

tworzą ciąg okresowy 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ..., w którym powtarza się sekwencja czterech cyfr: 3, 9, 7, 1. Skoro 2015 daje przy dzieleniu przez 4 resztę 3, to 3^{2015} kończy się cyfrą występującą na trzecim miejscu w tej sekwencji, czyli siódmką. Ostatecznie widzimy, że odjemna rozważanego działania kończy się cyfrą 6, zaś odjemnik cyfrą 7. W takim razie różnica kończy się cyfrą 9.

5. Taki trójkąt ma boki długości 10, 10, x lub 10, x , x , gdzie x jest liczbą całkowitą dodatnią mniejszą lub równą 10. Pierwszy z przypadków daje 10 różnych możliwości dla $x = 1, 2, \dots, 10$. Drugi daje 5 możliwości dla $x = 6, 7, 8, 9, 10$, ale dla $x = 10$ w obu przypadkach dostaniemy ten sam trójkąt równoboczny. Ostatecznie widzimy, że takich trójkątów jest 14.
6. Można rozważyć wszystkie cztery przypadki: "Ala rozlała sok", ..., "Daria rozlała sok" i w każdym z nich ocenić prawdziwość wypowiedzi. Jedynie w przypadku "Ala rozlała sok" otrzymamy trzy kłamstwa i jedną prawdę, zatem to właśnie Ala jest sprawcą.

Można też zauważyć, że wypowiedzi Celiny i Darii nie mogą być ani obie fałszywe ani obie prawdziwe, zatem jedna z nich jest prawdziwa. Wtedy wiemy, że pozostałe dziewczynki skłamały, w szczególności Ala. Pozostaje sprawdzić, czy jeśli Ala byłaby sprawcą, to rzeczywiście wśród wypowiedzi jest dokładnie jedna prawdziwa.

7. Zauważmy, że trójkąt ABC jest prostokątny o kątach ostrych 60° i 30° (trójkąt "ekierkowy"). Długość AB to 10, zatem $AC = 5$ oraz $BC = 5\sqrt{3}$. Pole wynosi więc $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{25}{2}\sqrt{3}$. Wiadomo, że $\sqrt{3} < 2$, zatem $\frac{25}{2}\sqrt{3} < \frac{25}{2} \cdot 2 = 25$, czyli pole trójkąta ABC jest mniejsze niż 25.
8. Jeśli przez x oznaczymy początkową liczbę, to treść zadania możemy zapisać za pomocą równania

$$\frac{x - 7}{10} = x - 34.$$

Równanie to ma tylko jedno rozwiązanie: $x = 37$.

9. Liczba paczek herbaty w jednym kartonie musi być więc dzielnikiem każdej z liczb $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Ponieważ największy wspólny dzielnik tych liczb wynosi $2^3 \cdot 3^2 = 72$, to wiemy już, że liczba paczek w kartonie jest dzielnikiem liczby 72, który jest większy niż 50. Jediną możliwością jest więc 72. W takim razie do pierwszego sklepu dostarczono 7, do drugiego 11, a do trzeciego 5 kartonów paczek herbaty.
10. Oznaczając przez x wagę złota w stopie (w kg), treść zadania możemy zapisać następująco (waga srebra to $4 - x$):

$$77\frac{7}{9}\% \text{ z } (4 - x) \text{ wynosi } x$$

co daje równanie $\frac{7}{9}(4 - x) = x$. Otrzymujemy jedno rozwiązanie $x = 1,75$ kg.