POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA I – rok szkolny 2015/2016

poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Trzy różne liczby całkowite dodatnie pomnożone przez siebie dają 12. Ile wynosi ich suma?

2. Pomiędzy Placem Wolności a Placem Zwycięstwa biegną dwie ulice dwukierunkowe i dwie jednokierunkowe. Na ile sposobów można odbyć podróż z Placu Wolności do Placu Zwycięstwa i z powrotem?

3. Drugi sześcian ma krawędź o 30% dłuższą niż pierwszy. Czy objętość drugiego sześcianu jest niecałe dwa razy większa niż objętość pierwszego sześcianu, czy ponad dwa razy większa?

4. Mateusz obliczył iloczyn wszystkich liczb pierwszych mniejszych od 50 i otrzymał liczbę

   $$614\,889\,782\,588\,491\,4ab.$$

   Jakie cyfry ukrywają się pod literkami a i b?

5. W trapezie prostokątnym $ABCD$ wysokość wynosi 3, a kąt ostry ma miarę $60°$. Ile wynosi pole tego trapezu, jeśli krótsza przekątna trapezu jest prostopadła do ramienia?

6. Czy liczba

   $$10^{100} + 2^{100} - 1^{100}$$

   dzieli się przez 5?

7. Matylada podzieliła pewną liczbę przez 4 i otrzymała resztę zero. Co więcej, suma otrzymanego ilorazu oraz dzielnej i dzielnika wynosiła 74. Jaka była początkowa liczba Matyldy?

8. Pomiędzy miejscowościami Pcim i Kcim kursuje autobus, który pod górę jeździ z prędkością 40 km/h, a z góry z prędkością 80 km/h. Ponieważ droga z Pcimia do Kcimia prowadzi przez wzgórza, to wszyscy mieszkańcy okolicznych wiosek wiedzą, że z Pcimia do Kcimia jedzie się 12 minut, a z Kcimia do Pcimia tylko 10 minut i 30 sekund. Ile kilometrów na droga pomiędzy tymi miejscowościami?

9. Przekątne równoległoboku o obwodzie 32 cm dzielą go na cztery trójkąty. Różnica obwodów dwóch z tych trójkątów wynosi 4 cm. Ile wynoszą długości boków tego równoległoboku?

10. Czy liczbę 113 można zapisać jako sumę dwóch liczb pierwszych?

PMM – rok szkolny 2015/2016 – poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Ponieważ rozkład na czynniki pierwsze liczby 12 to $2 \cdot 2 \cdot 3$, zatem 12 można przedstawić jako iloczyn trzech różnych dzielników jedynie na dwa sposoby: $1 \cdot 2 \cdot 6$ oraz $1 \cdot 3 \cdot 4$. W takim razie suma wynosi 9 lub 8.

2. Rozważmy kolejno dwie możliwości. W pierwszej przyjmijmy, że obie ulice jednokierunkowe prowadzą z Placu Wolności do Placu Zwycięstwa lub że obie ulice jednokierunkowe prowadzą z Placu Zwycięstwa do Placu Wolności. Wtedy liczba dróg to $4 \cdot 2 = 8$. W drugim przypadku przyjmijmy, że jedna z ulic jednokierunkowych prowadzi z Placu Wolności do Placu Zwycięstwa, a druga z Placu Zwycięstwa do Placu Wolności. Wtedy liczba dróg to $3 \cdot 3 = 9$. Ostatecznie widzimy, że wszystkich możliwych dróg jest 8 lub 9 (w zależności od kierunków ulic jednokierunkowych).

3. Objętość drugiego sześcianu stanowi $(1,3)^3 \cdot 100\%$ pierwszego, czyli ponad 200%.

4. Otrzymana liczba jest podzielna przez 2 i 5, zatem kończy się cyfrą 0. Liczba ta jest też podzielna przez 3, ale nie przez 9, a skoro jej suma cyfr to $92 + a$, więc a może być jedynie 1 lub 4. Zauważmy jednak, że liczba ta nie jest podzielna przez 4, więc cyfra dziesiątek nie może być parzysta. Ostatecznie: $a = 1$ i $b = 0$.

5. Krótsza przekątna dzieli zatem trapez na dwa trójkąty prostokątne "ekierkowe" o kątach ostrych 60° i 30°. Przyjmując, że dłuższa podstawa to AB, zaś ramię prostopadłe do podstaw to BC, z zależności w trójkątach ekierkowych otrzymujemy kolejno: $BC = 3$, $DC = 3\sqrt{3}$, $DB = 6$, $AB = 4\sqrt{3}$. W takim razie pole trapezu wynosi $\frac{21}{2}\sqrt{3}$.

6. Tak. Aby obliczyć ostatnią cyfrę sumy czy różnicy, wystarczy nam informacja o ostatniej cyfrze każdego ze składników. Zauważmy, że liczba 10^{100} ma cyfrę jedności 0. Liczba 2^{100} ma cyfrę jedności 6, gdyż ciąg cyfr jedności kolejnych potęg dwójki jest okresowy z powtarzającą się czteroelementową sekwencją $2, 4, 8, 6$, a 100 jest podzielne przez 4. Wiemy też, że liczba 1^{100} to 1. Rozważana liczba ma więc cyfrę jedności równą 5, a zatem dzieli się przez 5.

7. Początkowa liczba Matyldy to liczba podzielna przez 4, oznaczmy ją więc przez $4n$. Wtedy dzielna to $4n$, dzielnik to 4 oraz iloraz to n. Z treści zadania wnosimy, że $4n + n + 4 = 74$, czyli $n = 14$. Zatem poczatkowa liczba Matyldy to 56.

8. Zauważmy, że jeśli autobus pojedzie z Pcimia do Kcimia i z powrotem, to przejedzie cała trasę dwukrotnie, zajmie mu to $22,5$ minuty ($\frac{22,5}{60}$ godziny) i tyle samo trasy będzie jechał pod górę, co z góry. Zatem przyjmując odległość pomiędzy miejscowościami za s otrzymujemy zależność $\frac{s}{40} + \frac{s}{80} = \frac{22,5}{60}$, czyli $s = 10$ km.

9. Skoro obwód wynosi 32 cm, to suma dwóch sąsiednich boków 16 cm. Przekątne w równoległoboku połowią się, więc różnica obwodów trójkątów musi być różnicą długości boków równoległoboku. Skoro jeden jest dłuższy od drugiego o 4 cm, to oznaczając długość krótszego boku przez x otrzymujemy równanie $x + x + 4 = 16$, czyli $x = 6$. W takim razie boki równoległoboku mają długości 6 cm i 10 cm.

10. Nie. Liczba 113 jest liczbą nieparzystą, zatem nie można jej otrzymać z dodawania dwóch liczb pierwszych nieparzystych. Jedyną liczbą pierwszą parzystą jest 2, ale niestety liczba $113 - 2 = 111$ nie jest liczbą pierwszą, gdyż dzieli się przez 3.