POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA I – rok szkolny 2015/2016

poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Mateusz nie może sobie przypomnieć trzech ostatnich cyfr dziewięciocyfrowego numeru telefonu do swojej mamy. Pamięta jednak, że początek numeru to 601364 oraz że numer do mamy jest podzielny zarówno przez 25, jak i przez 9. Postanowił więc wypróbować wszystkie numery, które spełniają te warunki. Ile co najwyżej prób go czeka?

2. W równoległoboku o bokach długości 10 cm i 12 cm krótsza przekątna ma 10 cm. Ile wynosi długość dłuższej przekątnej?

3. Ile co najwyżej punktów przecięć może powstać, gdy na płaszczyźnie narysujemy pięć prostych?

4. Ala, Ola, Jola i Ula ważyły się parami każda z każdą. Dziewczynki zapisywały wyniki tych ważeń i na końcu dodały je wszystkie do siebie otrzymując 474 kg. Ile ważą wszystkie cztery razem?

5. Ile wynosi suma cyfr liczby $10^{2015} - 12345$?

6. Na *Uniwersyteckie Kółko Matematyki Olimpijskiej* uczęszcza 17 uczniów z trójmiejskich gimnazjów. Czy wśród uczestników kółka można wskazać grupę pięciu uczniów z tej samej szkoły lub grupę pięciu uczniów każdy z innej szkoły?

7. Prostokąt niebędący kwadratem, którego jeden z boków ma długość 8 cm rozcięto na dwa przystające prostokąty, z których można zbudować kwadrat. Ile wynosiła długość przekątnych prostokąta przed rozcięciem?

8. Sześcian o krawędzi jednego metra pocięto na sześcianiki o krawędzi jednego milimetra i otrzymane sześcianiki ustawiono jeden przy drugim wzdłuż prostej. Gdyby Pan Andrzej chciał przejść się wzdłuż otrzymanego szeregu sześcianików, od początku do końca, idąc stałą prędkością 10 km/h, to ile czasu by mu to zajęło?

9. Z czterech sprawdzianów z matematyki Mateusz uzyskał średnią 14 punktów. W piątym, ostatnim już sprawdzianie w tym półroczu, można zdobyć maksymalnie 20 punktów. Czy Mateusz ma szansę na poprawienie średniej o dwa punkty?

10. W trójkącie prostokątnym ABC (kąt prosty przy wierzchołku C) na prostej AB zaznaczono punkty M i N tak, że $AM = AC$ oraz $BN = BC$. Ile stopni ma kąt MCN, jeśli rozważane punkty znajdują się na prostej w kolejności: N, B, A, M?

PMM – rok szkolny 2015/2016 – poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Dwie ostatnie cyfry numeru telefonu to 00, 25, 50 lub 75. Wiemy też, że suma wszystkich dziewięciu cyfr musi być podzielna przez 9. Otrzymujemy zatem tylko 5 możliwości na brakujące cyfry: 700, 025, 925, 250 oraz 475.

2. Oznaczając przez A, B, C, D wierzchołki równoległoboku w taki sposób, aby odcinek AB był dłuższym bokiem oraz kąt BAD był ostry, widzimy, że trójkąt ABD jest równoramienny, zatem spodek M jego wysokości DM dzieli bok AB na dwie połowy o długości 6 cm. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AMD wnosimy, że $DM = 8$ cm. Niech N będzie rzutem punktu C na prostą AB, wtedy trójkąt BNC jest przystający do trójkąta AMD, zatem $BN = 6$ cm oraz $NC = 8$ cm. Długość AC liczymy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ANC i otrzymujemy: $AC = 2\sqrt{97}$ cm.

3. Jeśli na płaszczyźnie będą dwie proste, to mamy maksymalnie 1 punkt przecięcia. Kolejna, trzecia prosta, doda maksymalnie 2 punkty przecięć, gdy przetnie się z każdą z wcześniej narysowanych prostych. Następna, czwarta prosta, da maksymalnie 3 nowe punkty przecięcia (po jednym z każdą z wcześniej narysowanych prostych). Ostatnia, piąta prosta, maksymalnie dorzuci 4 punkty. Widzimy zatem, że maksymalnie otrzymamy $1+2+3+4 = 10$ przecięć. (Aby uzasadnić, że rzeczywiście możemy otrzymać 10 punktów przecięć, uczeń powinien narysować odpowiedni przykład.)

4. Zauważmy, że w końcowym wyniku waga każdej dziewczynki jest uwzględniana trzykrotnie (jako składnik ważenia z każdą z trzech przyjaciółek). Wystarczy zatem końcową sumę podzielić na 3, czyli $474 : 3 = 158$.

5. Rozwiązanie najłatwiej przedstawić posługując się algorytmem odejmowania pisemnego. Liczba 10^{2015} to jedynka i 2015 zer, zatem odejmując od niej liczbę 12345 otrzymamy 2010 dziewiątek oraz końcówkę 87655. Suma cyfr takiej liczby to $2010 \cdot 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 5$, czyli 18121.

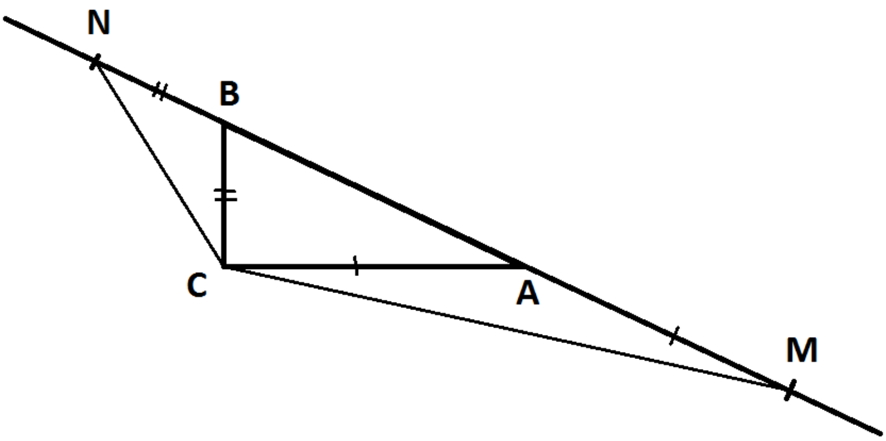
6. Tak. Przypuśćmy bowiem, że nie można wskazać grupy pięcioosobowej uczniów z jednego gimnazjum. Oznacza to, że z każdego gimnazjum w zajęciach kółka uczestniczy maksymalnie 4 uczniów. Skoro więc uczestników jest 17, to muszą oni pochodzić z przynajmniej pięciu różnych gimnazjów.

7. Prostokąt musiał zostać przecięty linią przechodzącą przez środki dłuższych boków, co więcej każdy z powstałych prostokątów musi być połówką kwadratu, czyli mieć boki w stosunku $1 : 2$. W takim razie wyjściowy prostokąt ma boki w stosunku $1 : 4$. Musimy rozważyć dwa przypadki: prostokąt 8 cm na 2 cm, którego przekątna ma długość $2\sqrt{17}$ cm oraz prostokąt 8 cm na 32 cm, którego przekątna ma długość $8\sqrt{17}$ cm.

8. Ponieważ $1\ \mathrm{m}^3 = (10^3)^3\ \mathrm{mm}^3$, to szereg sześcianików będzie miał długość 10^9 mm, czyli 1000 km. Panu Andrzejowi ten spacer zająłby więc 100 godzin.

9. Nie. Aby jego średnia z pięciu sprawdzianów wynosiła 16 punktów, to w sumie musiałby mieć ze wszystkich sprawdzianów 80 punktów, a z czterech wcześniejszych ma jedynie $4 \cdot 14 = 56$ punktów. Brakuje mu więc aż 24 punkty, a na piątym sprawdzianie może uzyskać maksymalnie 20 punktów.

10. Sytuację podaną w zadaniu widzimy na poniższym rysunku: Jeśli $\measuredangle ACM$ oznaczymy



przez α, zaś $\measuredangle BCN$ przez β, to widzimy, że $\measuredangle BAC$ jest równy 2α (jako przyległy do kąta $\measuredangle CAM$ równego $180° - 2\alpha$) oraz, analogicznie $\measuredangle CBA$ jest równy 2β. Skoro $2\alpha + 2\beta = 90°$, to $\alpha + \beta = 45°$. Zatem $\measuredangle MCN = \alpha + 90° + \beta = 90° + 45° = 135°$.