POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA I – rok szkolny 2015/2016

poziom: gimnazjalny

FINAŁ

1. Czy istnieje trójkąt o wysokościach 6 cm, 6 cm i 3 cm?

2. Dla dodatniej liczby naturalnej n symbol $n!$ [czytaj: *en silnia*] oznacza iloczyn liczb naturalnych od 1 do n. Określ, jakie są możliwe cyfry jedności liczby $n!$.

3. Ile jest liczb dwunastocyfrowych zapisanych za pomocą cyfr $1, 2, 3$, w taki sposób, że sąsiednie cyfry różnią się o 1?

4. Świeże grzyby zawierają 90% wody, a suszone tylko 5%. Ile kilogramów grzybów trzeba poddać suszeniu, aby otrzymać 1 kg suszonych grzybów?

5. Napisano dwa razy z rzędu tę samą liczbę dwucyfrową i otrzymano liczbę czterocyfrową. Pokaż, że otrzymana liczba ma dokładnie dwa razy więcej dzielników niż wyjściowa liczba dwucyfrowa.

6. W magazynie znajdują się skrzynki z jabłkami, skrzynki z gruszkami i skrzynki z bananami (niekoniecznie identyczne). W sumie jest ich 24. Uzasadnij, że można pośród nich wybrać 13 skrzynek tak, aby zawierały co najmniej połowę wszystkich jabłek, połowę wszystkich gruszek i połowę wszystkich bananów.

7. Odcinek poprowadzony do dłuższej podstawy z wierzchołka trapezu znajdującego się przy krótszej podstawie, dzieli ten trapez na dwie figury, których pola są w stosunku $2 : 3$. W jakim stosunku dzieli on podstawę trapezu, jeśli długość krótszej podstawy stanowi połowę dłuższej?

8. Ślimak porusza się po olbrzymiej (z punktu widzenia ślimaka – nieograniczonej) szklanej powierzchni ze stała prędkością, przy czym co 15 minut skręca o $90°$ – czasami w prawo, czasami w lewo. Udowodnij, że jeśli ślimak wrócił do punktu wyjścia, to musiała minąć całkowita liczba godzin.

9. Pokaż, że jeżeli p i $p^2 + 2$ są liczbami pierwszymi, to $3p^3 + 2$ też jest liczbą pierwszą.

10. Ile wynosi reszta z dzielenia przez 7 sumy kwadratów wszystkich liczb dwucyfrowych?

11. Długości boków trójkąta prostokątnego są liczbami całkowitymi. Jedna z przyprostokątnych jest równa 26. Jakie są długości pozostałych boków tego trójkąta?

12. Punkt P leżący wewnątrz równoległoboku $ABCD$ połączono odcinkami z czterema wierzchołkami, tworząc cztery trójkąty (jak na rysunku). Wykaż, że suma pól białych trójkątów jest taka sama jak czarnych.