POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA I – rok szkolny 2015/2016

poziom: gimnazjalny

PÓŁFINAŁ

1. Niech $p > 3$ będzie taką liczbą pierwszą, że $2p+1$ jest również liczbą pierwszą. Czy liczba $4p+1$ może być liczbą pierwszą?

2. Kiedy dokładnie między godziną drugą i trzecią wskazówki zegara pokryją się? Zakładamy, że wskazówki poruszają się ze stałą prędkością.

3. Mamy 7 identycznie wyglądających monet, wśród których jest 6 prawdziwych (wszystkie mają taką samą masę) i jedna fałszywa (której masa jest inna niż masa monety prawdziwej). Ile trzeba wykonać ważeń na wadze szalkowej, by mieć pewność, która moneta jest fałszywa i czy waży więcej, czy mniej od monety prawdziwej?

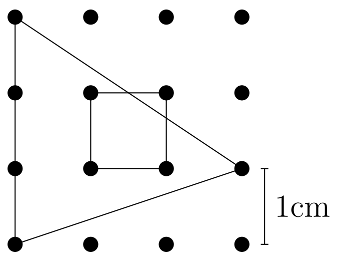
4. Ile jest takich liczb dwucyfrowych n, że iloczyn cyfr liczby n dzieli różnicę kwadratu liczby n i kwadratu cyfry jedności liczby n?

5. Suma odwrotności dwóch liczb naturalnych równa jest $\frac{1}{9}$. Jakie to liczby?

6. Oblicz pole trapezu prostokątnego, wiedząc, że odległości środka okręgu wpisanego w ten trapez od końców ramienia nieprostopadłego do podstaw są równe 5 i 10.

7. Z czterech wierzchołków kwadratu o boku długości 1 zakreślono okręgi o promieniu 1. Łuki okręgów podzieliły wnętrze kwadratu na 9 części. Ile wynosi pole każdej z tych części?

8. Oblicz pole części wspólnej trójkąta i kwadratu.



9. Czy można krawędziom sześcianu tak przyporządkować liczby naturalne od 1 do 12 (każdej krawędzi inną liczbę), aby suma liczb na każdej ścianie była taka sama?

10. Każdy punkt na prostej ma jeden z dwóch kolorów: czerwony lub niebieski. Uzasadnij, że istnieje odcinek AB leżący na tej prostej, którego oba końce oraz środek są w tym samym kolorze.

PMM – rok szkolny 2015/2016 – poziom: szkoła gimnazjalna

PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Nie może. Zauważmy, że p nie dzieli się przez 3 (jest bowiem pierwsza i większa niż 3) oraz nie daje reszty 1 z dzielenia przez 3, bo wtedy liczba $2p + 1$ byłaby podzielna przez 3 (a nie może, bo jest pierwsza i większa niż 3). Zatem p musi dawać z dzielenia przez 3 resztę 2, tzn. $p = 3k + 2$ dla pewnej liczby naturalnej k. Jednak wtedy $4p + 1 = 4(3k + 2) + 1 = 3(4k + 3)$, co pokazuje, że $4p + 1$ nie jest liczbą pierwszą.

2. Oznaczmy przez x kąt (w stopniach), jaki zatoczy wskazówka godzinowa (G) od godziny drugiej do miejsca spotkania. Wtedy wskazówka minutowa (M) zatoczy kąt $60^o + x$. Ponieważ M porusza się 12 razy szybciej, to $60^o + x = 12x$, zatem $x = \frac{60^o}{11}$. Oznacza to, że M pokaże $(60^o + x)\frac{5\text{min}}{30^o} = 10\frac{10}{11}$min po godzinie drugiej.

3. Zauważmy, że dwa ważenia to za mało. Rzeczywiście, układ monet ma 14 możliwych wariantów, a dwa ważenia dają najwyżej 9 różnych wyników. Widzimy zatem, że potrzebne są minimum 3 ważenia. Poniżej podany jest jeden ze sposobów postępowania, dający poprawną odpowiedź przy 3 ważeniach.

   Ponumerujmy monety cyframi 1,2,3,4,5,6,7. Kładziemy na jedną szalę 1,2,3, a na drugą 4,5,6. Jeżeli jest równowaga, to fałszywą monetą jest 7 i wystarczy ją porównać z 1. Jeżeli nie ma równowagi, to 1 i 4 zamieniamy miejscami, 2 i 5 pozostawiamy na miejscu, a 3 i 6 zdejmujemy. Możliwe są następujące sytuacje :

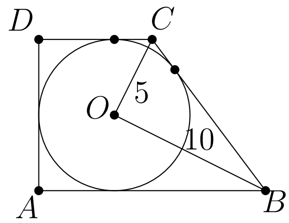
   (1) równowaga. Wtedy fałszywą jest moneta 3 lub 6. Porównujemy 3 i 7. Jeżeli jest równowaga, to fałszywą monetą jest 6, a pierwsze ważenie powie o jej ciężarze. Jeżeli ostatnie ważenie nie daje równowagi, to mówi o wadze fałszywej monety 3.

   (2) wychylenie szalek nie zmieniło się. Wtedy fałszywą monetą jest 2 lub 5. Porównujemy 2 oraz 7 i postępujemy jak w (1).

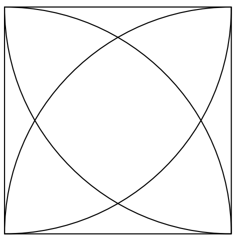
   (3) wychylenie zmieniło się. Wtedy fałszywą monetą jest 1 lub 4. Porównujemy 1 oraz 7 i postępujemy jak wyżej.

4. Niech $n = 10a + b$. Z warunków zadania wynika, że $ab|(10a + b)^2 - b^2 = 100a^2 + 20ab$, co oznacza, że $b|100a$. Jeśli cyfra b to 1,2,4 lub 5, to a może być dowolną cyfrą, co daje 36 liczb dwucyfrowych. Dla $b = 3$ oraz $b = 6$, cyfra a musi być 3, 6 lub 9 (kolejne 6 liczb). Gdy $b = 7$, to a musi być 7 (1 liczba). Gdy $b = 8$, to a musi być 2, 4, 6 lub 8 (4 liczby). A dla $b = 9$ pasuje tylko $a = 9$ (1 liczba). Ostatecznie jest 48 liczb dwucyfrowych o podanej własności.

5. Przekształcamy równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{9}$ do postaci $9(x + y) = xy$, czyli $(x - 9)(y - 9) = 81$. Liczby x i y są całkowite dodatnie, więc wystarczy sprawdzić kilka przypadków postaci $x - 9 = 1$ i $y - 9 = 81$, itd. Ostatecznie, szukane liczby to 10 i 90 lub 12 i 36 lub 18 i 18.

6. 

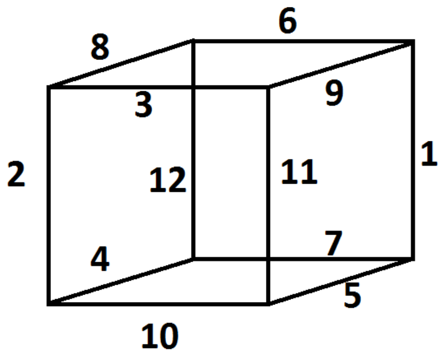
Niech trapez ma wierzchołki A, B, C, D, z kątami postymi przy A i D. Z faktu, że istnieje okrąg wpisany w trapez wiemy, że $AB + CD = BC + AD$ oraz $AD = 2r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego. Jeśli O jest środkiem okręgu wpisanego, to kąt BOC jest prosty, bo $\measuredangle OBC + \measuredangle OCB = (\measuredangle ABC + \measuredangle DCB)/2 = 90^o$. Zatem z twierdzenia Pitagorasa $BC = 5\sqrt{5}$. Możemy teraz na dwa sposoby obliczyć pole tego trójkąta $OB \cdot OC/2 = BC \cdot r/2$. Stąd $r = 2\sqrt{5}$. Zatem pole trapezu wynosi $2r \cdot (AB + CD)/2 = r(BC + AD) = r(BC + 2r) = 2\sqrt{5} \cdot 9\sqrt{5} = 90$.

7. 

Oznaczmy pole części środkowej przez A, każdej części przy krawędzi przez B, a każdej części „narożnej” przez C. Cały kwadrat to $A + 4B + 4C = 1$. Ćwiartkę koła daje $A + 2B + 3C = \pi/4$. Trzecie potrzebne równanie to np. $A + B + 2C = 2 \cdot \pi/6 - \sqrt{3}/4$ (dwa nachodzące na siebie wycinki koła o kącie $60°$). Z tego układu równań otrzymujemy szukane pola: $A = 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$, $B = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$, $C = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{\pi}{12}$

8. Samo obliczenie nie stanowi wielkiego problemu. Od pola kwadratu jednostkowego trzeba odjąć pole małego odciętego trójkącika prostokątnego o przyprostokątnych $1/2$ i $1/3$, czyli pole części wspólnej to $\left(1 - \frac{1}{12}\right)$ cm^2. Proponujemy jednak odejmować dwa punkty za brak uzasadnienia długości boków trójkąta, popartego np. twierdzeniem Talesa, podobieństwem trójkątów lub rachunkiem współrzędnych.

9. Tak, można. Przyporządkowanie można zobaczyć na poniższym rysunku:



10. Niech P_1 i P_2 będą punktami w tym samym kolorze (powiedzmy czerwonymi). Wprowadźmy na prostej współrzędne tak, aby P_1 był punktem -1, zaś P_2 był punktem 1. Jeśli punkt 0 jest czerwony, to za AB możemy wziąć $[-1, 1]$, czyli P_1P_2. Jeśli 0 jest niebieskie, to popatrzmy na punkt 3. Jeśli jest on czerwony, to za AB bierzemy $[-1, 3]$. Jeśli 3 jest niebieski, to popatrzmy na punkt -3. Gdy jest on czerwony, to za AB bierzemy odcinek $[-3, 1]$, a gdy niebieski, to $[-3, 3]$.