POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA I – rok szkolny 2015/2016

poziom: ponadgimnazjalny

ĆWIERĆFINAŁ

1. W trójkącie ABC bok AC jest krótszy od boku BC. Dwusieczna kąta przy wierzchołku C przecina się z symetralną boku AB w punkcie M. Uzasadnij, że na czworokącie $AMBC$ można opisać okrąg.

2. Czy kwadrat można podzielić na 2016 kwadratów?

3. Zegar cyfrowy wyświetla czas w fromacie 24-godzinnym $AB : CD$ (tzn. godziny i minuty). Przez jaki czas w ciągu doby na wyświetlaczu jest widoczna co najmniej jedna cyfra 1?

4. Ile cyfr w zapisie dziesiętnym ma liczba będąca liczbą cyfr liczby 2016^{2016}?

5. Czy długości odcinków, na które dzielą się dwie przecinające się cięciwy mogą wyrażać się czterema różnymi liczbami pierwszymi?

6. W finale Ligi Matematycznej wzięło udział 100 uczniów wyłonionych we wcześniejszych etapach z 14 szkół (z każdej szkoły w finale brał udział co najmniej jeden uczeń). Udowodnij, że pewne dwie szkoły miały w finale tę samą liczbę reprezentantów.

7. Dla jakich liczb całkowitych dodatnich k wyrażenie $\frac{k^2+1}{k+7}$ ma wartość całkowitą?

8. Czy istnieją liczby całkowite $a_1, a_2, ..., a_{10}$ takie, że liczby $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, $a_3 - a_4$,..., $a_9 - a_{10}$, $a_{10} - a_1$ można ustawić w takiej kolejności, że będą tworzyły ciąg kolejnych liczb całkowitych?

9. Wyznacz, ile zer na końcu ma zapis dziesiętny liczby $2015! + 2014!$.

10. Rysunek poniżej przedstawia zapis poprawnego mnożenia pisemnego. Jak widać, tylko jedna cyfra jest widoczna, a pozostałe cyfry zostały zasłonięte gwiazdkami. Jak będzie wyglądało to działanie, gdy odsłonimy wszystkie gwiazdki?

$$\begin{array}{cccc}
 & & ☆ & ☆ \\
 & \cdot & ☆ & ☆ \\
\hline
 & & ☆ & ☆ \\
☆ & ☆ & ☆ & \\
\hline
9 & ☆ & ☆ & ☆
\end{array}$$

PMM – rok szkolny 2015/2016 – poziom: szkoła ponadgimnazjalna

ĆWIERĆFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Narysujmy trójkąt ABC oraz okrąg na nim opisany. Dwusieczna kąta przy wierzchołku C przecina ten okrąg w punkcie, który oznaczmy przez P. Ponieważ kąty wpisane ACP i PCB są równe, to punkt P jest środkiem łuku AB. Skoro łuki AP i PB są równe, to równe są także cięciwy AP i PB. Wynika stąd, że punkt P leży na symetralnej AB (bo leży w jednakowej odległości od końców odcinka AB), czyli jest punktem M. Stąd punkty A, M, B, C leżą na jednym okręgu.

2. Tak. Na wiele sposobów. Możemy na przykład przy jednym z wierzchołków odciąć duży kwadrat o boku równym $\frac{1007}{1008}$ boku wyjściowego kwadratu, a pozostały obszar (pasek leżący wzdłuż dwóch boków) podzielić na kwadraciki o boku równym $\frac{1}{1008}$ boku wyjściowego kwadratu.

3. Zauważmy, że wśród 24 liczb AB oznaczających poszczególne godziny doby, jest dokładnie 12, w których zapisie występuje choćby jedna jedynka: $01, 10, 11, 12, \ldots, 19, 21$. Zatem wiemy, że przez te dwanaście godzin pojawi się jedynka w części AB wyświetlacza. W ciągu każdej z pozostałych 12 godzin, w sekcji CD jedynka pojawi się 15 razy na wszystkie 60 liczb tam wyświetlanych (w liczbach $01, 10, 11, 12, \ldots, 19, 21, 31, 41, 51$), czyli przez $\frac{1}{4}$ każdej z tych godzin. Daje nam to dodatkowy czas $\frac{1}{4} \cdot 12 = 3$ godzin. Ostatecznie, co najmniej jedna jedynka będzie widoczna przez 15 godzin.

4. Zauważmy, że $1000^{2016} < 2016^{2016} < 10000^{2016}$, czyli $10^{6048} < 2016^{2016} < 10^{8064}$. Zatem liczba cyfr liczby 2016^{2016} to pewna liczba naturalna pomiędzy 6049 a 8064. Wszystkie liczby z tego zakresu mają jednak po 4 cyfry, więc odpowiedź to 4.

5. Nie. Przypuśćmy, że pierwsza z cięciw dzieli się na odcinki o długościach a i b, a druga na odcinki o długościach c i d. Z twierdzenia o siecznych wynika, że musi zachodzić równość $ab = cd$. Równość ta nie może być prawdziwa dla czterech różnych liczb pierwszych. (Jeśli uczeń nie umie uzasadnić tego ostatniego faktu, to i tak proponujemy ocenić zadania na zrobione, ale na 6 punktów).

6. Przypuśćmy, że z każdej szkoły byłaby inna liczba reprezentantów. Wtedy łączna liczba uczniów ze wszystkich szkół wynosiłaby co najmniej $1+2+\ldots+14 = 105$, co jest sprzeczne z informacją, że uczniów było tylko 100. Zatem nasze przypuszczenie musi być fałszywe, więc któraś z liczb musi się powtarzać.

7. Ponieważ $\frac{k^2+1}{k+7} = k - 7 + \frac{50}{k+7}$, to wystarczy wskazać liczby całkowite dodatnie k, dla których wyrażenie $\frac{50}{k+7}$ ma wartość całkowitą. Szukamy zatem liczb całkowitych postaci $k + 7$, która są większe od 7 i są dzielnikami liczby 50. Stąd $k + 7$ może przyjąć wartości 10, 25, 50. Zatem k może być równe 3, 18 lub 43.

8. Nie istnieją. Zauważamy, że suma liczb $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, $a_3 - a_4$,..., $a_9 - a_{10}$, $a_{10} - a_1$ wynosi 0. Pytamy więc, czy suma 10 kolejnych liczb całkowitych może być równa 0. Nie, gdyż w zestawie kolejnych 10 liczb całkowitych jest dokładnie 5 liczb nieparzystych i 5 parzystych. Ich suma jest więc liczbą nieparzystą.

9. Zadanie sprowadza się do wyliczenia jaka najwyższa potęga dziesiątki dzieli liczbę $2015! + 2014! = 2016 \cdot 2014!$. W tym celu wystarczy sprawdzić, ile jest czynników 5 w rozkładzie liczby $2014!$ na czynniki pierwsze (czynnik 2 wystąpi bowiem z pewnością więcej razy). Zauważmy, że wśród liczb od 1 do 2014 są dokładnie 402 liczby podzielne przez 5, jest 80 liczb podzielnych przez 25, 16 liczb podzielnych przez 125 i 3 liczby podzielne przez 625 (oraz nie ma liczb podzielnych przez wyższe potęgi piątki). W takim razie w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $2014!$ czynnik 5 występuje w potędze $402 + 80 + 16 + 3 = 501$. Oznacza to, że liczba $2015! + 2014!$ ma na końcu 501 zer.

10. Jeśli którakolwiek z liczb mnożonych byłaby mniejsza od 90, to wynik będzie mniejszy niż 9000, więc mamy dwie dziewiątki w pierwszej kolumnie u góry. Dalej widać, że druga liczba kończy się na 1, bo inaczej mielibyśmy trzycyfrowy wynik mnożenia pierwszej liczby przez cyfrę jedności drugiej. Doszliśmy zatem do wniosku, że przedstawione działanie, to iloczyn $9a \cdot 91$, dla pewnej cyfry a. Jednak $98 \cdot 91 = 8918$, czyli za mało, więc jedynym rozwiązaniem jest $99 \cdot 91$.